А. В. КРУШЕВСКИЙ

СПРАВОЧНИК по ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ и МЕТОДАМ



А. В. КРУШЕВСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ И МЕТОДАМ

КИЕВ «ТЕХНІКА» 1982

65.9 (2) 21 я2
К84

Крушевский А. В.

К84 Справочник по экономико-математическим моделям и методам. — К.: Техніка, 1982. — 208 с.

В пер.:1 р. 13000 экз.

В книге приведены экономико-математические модели, используемые при выработке плановых и управленческих решений на предприятиях, в министерствах, ведомствах, объединениях и в целом в народном хозяйстве. В принятой классификации рассмотрены отдельно экономико-математические модели для промышленного производства, сельского хозяйства, транспорта и торговли. Приведены методы прогнозирования технико-экономических показателей. Кратко изложены основные задачи математического программирования: методы решения систем линейных алгебраических уравнений, виды задач линейного программирования и методы их решения, двойственные задачи, целочисленное программирование, нелинейное и квадратичное программирование.

Рассчитан на инженерно-технических работников различных отраслей народного хозяйства, инженеров-экономистов, работающих в вычислительных центрах предприятий и отраслей, министерств и ведомств, научно-исследовательских институтов, а также может быть полезен студентам различных вузов.

К $\frac{2202000000\text{-}128}{М202(04)\text{-}82}$ 53.82 65.9(2)21я2

Рецензенты д-р физ.-мат. наук *Н. В. Яровицкий*, *В. В. Володин*

Редакция литературы по энергетике, электронике, кибернетике и связи

Зав. редакцией *З. В. Божко*

АРКАДИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ КРУШЕВСКИЙ, д-р экон. наук

Справочник по экономико-математическим моделям и методам

Редактор *Л. М. Друзенко*
Оформление художника *Л. А. Дикарева*
Художественные редакторы *Л. А. Дикарев, В. С. Шапошников*
Технический редактор *Е. О. Толстых*
Корректоры *Л. В. Ляшенко, В.Н. Руденко*

Информ. бланк № 1674.
Сдано в набор 19.03.81. Подписано в печать 23.06.82. БФ 07232
Формат 60×90 /16. Бумага типогр. № 3. Гарн. лит. Печ. выс.
Усл. печ. л.13. Усл.кр.-отт. 13,32. Уч.-изд. л. 16,95. Тираж 13000 экз. Зак. 1-398.
Цена 1 р.

Издательство «Техника», 252601, Киев, 1, ГСП, Крещатик, 5.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе на книжной фабрике «Коммунист» 310012, Харьков-12, Энгельса, 11.

ВВЕДЕНИЕ

Научно-технический прогресс неразрывно связан с совершенствованием системы планирования и управления на различных уровнях во всех отраслях науки, техники, производства и потребления. Одним из важных вспомогательных средств изучения технико-экономических процессов и выработки плановых управленческих решений является использованиеи экономико-математических моделей, методов и современных электронно-вычислительных машин.

Экономико-математическая модель — это математическая задача, отражающая в абстрактном виде количественные закономерности процесса с определенной целью. Экономико-математическая модель должна реально (адекватно) отражать цели экономического процесса. Обычно цель выражена в виде критерия — целевой функции, а условия и закономерности — в виде математических соотношений. Поскольку все свойства и закономерности процесса учесть в экономико-математических моделях невозможно, то отражают лишь наиболее важные.*

Для использования экономико-математической модели необходимо произвести выбор подходящей модели, подготовить информацию, создать или подобрать метод решения задачи, составить и получить имеющуюся программу на ЭВМ, провести расчеты на ЭВМ и проанализировать полученные расчеты. Выбор математической модели должен основываться на анализе факторов, показателей и взаимосвязей между ними исходя из поставленных целей.

Математические модели одного и того же процесса могут быть различными в зависимости от требований, которые ставит перед собой исследователь. Чем больше показателей, факторов и взаимосвязей учитывается и чем точнее они вычисляются, тем полнее модель отражает экономический процесс и тем сложнее она становится. Использовать сложную модель трудно, так как она содержит много неизвестных величин, коэффициентов, соотношений. Подготовка информации и получение оптимального варианта в таких случаях становится трудной задачей. Поэтому на практике рассматриваются, как правило, несколько упрощенные модели, дающие удовлетворительные результаты. Если

---

* В дальнейшем экономико-математическую модель будем называть также математической моделью.

в модели учесть мало факторов, показателей и взаимосвязей, то в результате получается неприемлемое решение, так как в этом случае в модели недостаточно отражены реальные условия процесса. При моделировании необходимо четко формировать цель в виде критерия эффективности решаемой задачи. Экономические зависимости должны быть представлены в определенной количественной форме. Если реальные социально-экономические связи и факторы невозможно выразить в виде количественных зависимостей определенного вида, тогда эти зависимости учитываются приближенно с помощью более простых соотношений. Следует отметить, что наиболее распространенными являются линейные модели, так как в них просто и естественно интерпретируются закономерности процесса в виде линейных зависимостей. Большое значение имеет определение эффективного метода решения задачи, представленной в виде математической модели. Как правило, нелинейные модели сложнее линейных. Для нелинейных задач общего вида эффективных методов решения не разработано. Для многих нелинейных задач частного вида, например для задач квадратического программирования, имеются специальные сравнительно эффективные методы решения. Для задач линейного программирования разработаны универсальные эффективные методы решения. Многие модели сводятся к задаче целочисленного или смешанного программирования. Для таких задач однако имеются весьма приемлемые приближенные методы решения. Если для полученной модели нет приемлемого метода решения математической задачи, то его следует разработать. Однако надо помнить, что разработка такого метода является трудной задачей, требующей больших затрат времени и труда высококвалифицированных математиков. Практика показала, что для задач большой размерности наиболее эффективно использовать приближенные методы, которые не обязательно приводят к точному решению, но за приемлемое время могут дать вариант решения лучший имеющегося. Поэтому на практике очень часто оказывается полезным тот метод, который за приемлемое время дает возможность получить лучший вариант (не обязательно оптимальный) по сравнению с имеющимся.

Для создания программы на ЭВМ по реализации выбранного метода необходимо разработать техническое задание на программирование полученного алгоритма решения задачи. В этом задании надо указать, в какой системе дисковой операционной ДОС или операционной ОС будет создаваться программа. Система ДОС несколько проще, но имеет меньшие возможности, чем ОС. В системе ОС можно более эффективно составить программу, чем в системе ДОС, а это даст возможность при эксплуатации программы затрачивать гораздо меньше машинного времени. При создании программы целесообразно использовать блочный метод, т. е. создавать программу по блокам. Полезно выделять такие важные блоки: программа ввода данных, алгоритм решения, вывод на печать. Поскольку форма подготовки входных данных и печать результатов часто может меняться, то блочный метод позволяет легче исправить программу, перерабатывая лишь нужные блоки и оставляя остальные без переделки. Важно также предусмотреть различные варианты распечатки данных при решении одной и той же задачи. Например, если решение задачи проводится для исследовательской работы, то надо распечатать промежуточные варианты, а если требуется лишь окончательный результат, то печать должна быть в виде удобного документа.

Для решения задачи на ЭВМ необходимо подготовить информацию по конкретным значениям коэффициентов, параметров, показателей, факторов. Входная информация не должна содержать синтаксических и семантических ошибок, т. е. сбор первичной информации и ее предварительная обработка не должны искажать реальный смысл исследуемого процесса. Прагматические ошибки, т. е. неправильная оценка факторов, часто не могут быть выявлены при подготовке первичной информации, а обнаруживаются лишь после получения результатов расчетов. Поэтому для устранения прагматических ошибок проводят повторные расчеты на основе откорректированной информации. Подготовка информации — это весьма ответственная и трудоемкая работа. Особое внимание следует обращать на точность подготовки нормативной информации, так как даже небольшие ошибки в ней приводят

к большим погрешностям в результатах расчетов. Так, при небольших увеличениях норм затрат сырья окажется очень существенным завышение потребностей в сырье при выполнении плана производства продукции. И наоборот, при занижении норм потребления сырья результаты расчетов покажут нереальное уменьшение потребности в сырье. Такое же положение имеет место и при расчете норм работы оборудования и других ресурсов. Следует также учитывать, что с течением времени нормативная информация должна изменяться с учетом технического прогресса и износа оборудования.

Для более полного и эффективного использования информации создают банки данных. На основе полученной информации проводят расчеты, а затем анализируют полученные решения и выдают рекомендации. Обычно решение оптимизационных задач приводит к получению варианта, дающего улучшение значения критерия на 10—15%, что является весьма существенным. Однако часто анализ показывает, что при составлении модели не были учтены некоторые важные факторы и условия, а при подготовке информации были допущены значительные погрешности, поэтому полученные расчеты следует откорректировать с учетом допущенных погрешностей. Такая корректировка, обычно, снижает эффективность решения вдвое. Далее после проведенных корректировок, полученное решение также может показывать большой экономический эффект по сравнению с прежними программами реализации планов. Поэтому необходимо более тщательно проанализировать рекомендации, полученные на основе решения оптимизационных задач, и лишь после всестороннего обсуждения со специалистами принимать такие рекомендации.

В справочнике приведены основные математические модели технико-экономических процессов на уровне предприятий и по отраслям народного хозяйства: промышленности, сельскому хозяйству, транспорту, торговле. Изложены народнохозяйственные модели межотраслевого баланса и размещения производства.

Приведены основные математические методы решения оптимизационных задач для реализации приведенных выше решений.

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 252601, Киев, 1, ГСП, Крещатик, 5, издательство «Техніка».

Глава 1

МОДЕЛИ НА УРОВНЕ ПРЕДПРИЯТИЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В промышленном производстве большое значение приобретает организация выработки наиболее рациональных решений с целью повышения технического уровня производства, механизации и автоматизации производственных процессов, выявления внутренних резервов производственно-хозяйственной деятельности предприятия, лучшего использования ресурсов, сбыта продукции, решения задач технико-экономического планирования и т. д. Применение экономико-математических моделей и ЭВМ помогает решать эти задачи.

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ НА ПРОМЫШЛЕННОМ ПРЕДПРИЯТИИ

Продукцию изготавливают в основных и вспомогательных цехах, между которыми устанавливают технико-экономические связи. Технологический процесс заключается в комплектовании изделий из отдельных узлов и деталей, экономический — в формировании затрат на комплектацию изделий в результате использования материальных, технических, финансовых и трудовых ресурсов. Задача состоит в комплексной увязке технологической и экономической информации. Ее можно решать с помощью матричных моделей. Если матричная модель построена в натуральных показателях, то она называется технологической матричной моделью, если же она построена в денежном выражении — экономической моделью.

Введем обозначения:

i, j — вид продукции;
$i, j = 1, 2, \ldots, n$ — виды основной продукции;
$i, j = n+1, n+2, \ldots, m$ — виды вспомогательной продукции;
a_{ij} — норма расхода i-го вида продукции на производство единицы j-го вида продукции;
y_i — конечная продукция;
x_i — выпуск продукции i-го вида;
x_j — выпуск продукции j-го вида;
r — вид материалов, сырья, полуфабрикатов, комплектующих изделий и деталей, топлива, электроэнергии и др.;
d_{rj} — норма расхода r-го вида материального ресурса на изготовление единицы j-го вида продукции;
s — вид фондов (машин);
f_{sj} — норма расхода фондов (машинного времени) s-го вида на изготовление единицы j-го вида продукции;
g — вид труда;

t_{gj} — норма затрат (рабочего времени) g-го вида труда на изготовление единицы j-го вида продукции.

Математическая модель — система линейных уравнений:

$$\sum_{l=j}^{m} a_{lj}x_j + y_l = x_l \quad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Решая эту систему уравнений методом Гаусса, получаем объемы x_l основного и вспомогательного производств. Затем определяем следующие потребности:

ресурсов

$$\sum_{j=1}^{m} d_{rj}x_j = d_r;$$

фондов

$$\sum_{j=1}^{m} f_{sj}x_j = f_s;$$

труда

$$\sum_{j=1}^{m} t_{gj}x_j = t_g.$$

Если d_r, f_s, t_g выходят за лимиты, то надо пересмотреть (уменьшить) конечную продукцию y_l и решить систему уравнений, т. е. определить новые значения x_l или увеличить ресурсы.

1. Нормативы затрат на основное и вспомогательное производство

Продукция производства		Продукция потребления: основная, $j=1$	основная, $j=2$	вспомогательная, $j=3$	вспомогательная, $j=4$	Конечная продукция y_l
Основная	$i=1$	0,15	0,10	0,05	0,08	8,5
	$i=2$	0,20	0,30	0,10	0,50	15,0
Вспомогательная	$i=3$	0,30	0,50	0,40	0,22	0
	$i=4$	0,10	0,15	0,20	0,30	0
Сырье	$r=1$	1,0	1,5	0,8	2,0	
Энергия	$r=2$	0,5	0,8	0,3	1,0	
Фонды	$s=1$	2,5	1,3	2,0	2,8	
	$s=2$	1,0	1,5	1,8	1,3	
Труд	$g=1$	2,7	3,2	3,8	4,0	
	$g=2$	2,0	4,0	1,5	1,0	

Пример 1. Нормативы затрат приведены в табл. 1. Выпуск основной продукции x_1, x_2, вспомогательной — x_3, x_4. Для определения этих величин составляем систему уравнений:

$0,15x_1 + 0,1x_2 + 0,05x_3 + 0,08x_4 + 8,5 = x_1$; $0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 + 0,5x_4 + 15 = x_2$; $0,3x_1 + 0,5x_2 + 0,4x_3 + 0,22x_4 + 0 = x_3$; $0,1x_1 + 0,15x_2 + 0,2x_3 + 0,3x_4 + 0 = x_4$.

Решая эту систему, получаем план производства: $x_1 = 30$, $x_2 = 80$, $x_3 = 100$, $x_4 = 50$ ед.

Потребности ресурсов: $d_1 = 1 \cdot 30 + 1{,}5 \cdot 80 + 0{,}8 \cdot 100 + 2 \cdot 50 = 330$ ед.; $d_2 = 0{,}5 \cdot 30 + 0{,}8 \cdot 80 + 0{,}3 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 159$ ед.

Потребности фондов: $f_1 = 2{,}5 \cdot 30 + 1{,}3 \cdot 80 + 2 \cdot 100 + 2{,}8 \cdot 50 = 519$ ед.; $f_2 = 1 \cdot 30 + 1{,}5 \cdot 80 + 1{,}8 \cdot 100 + 1{,}3 \cdot 50 = 395$ ед.

Потребности труда: $t_1 = 2{,}7 \cdot 30 + 3{,}2 \cdot 80 + 3{,}8 \cdot 100 + 4 \cdot 50 = 917$ ед.; $t_2 = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 80 + 1{,}5 \cdot 100 + 1 \cdot 50 = 580$ ед.

МОДЕЛЬ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО (ПРОИЗВОДСТВЕННОГО) ПЛАНИРОВАНИЯ

Задача заключается в выборе такой технологии, чтобы при минимальных затратах выполнить план производства и использовать выделенные ресурсы.

Введем обозначения:

j — вид технологии;
n — число видов технологий;
x_j — интенсивность использования j-й технологии;
i — вид продукции;
l — число видов продукции;
a_{ij} — норма выпуска i-го вида продукции при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью;
Q_i — план выпуска i-го вида продукции;
s — вид ресурса;
b_s — количество выделенного ресурса s-го вида;
k — число всех видов выделяемых ресурсов;
b_{sj} — норма использования s-го вида ресурса при применении j-й технологии с единичной интенсивностью;
c_j — норма затрат при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью.

Математическая модель при минимуме затрат на производство продукции:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

при ограничениях на ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j \leqslant b_s \quad (s = 1, 2, \ldots, k),$$

при выполнении плана производства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

где $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Это задача линейного программирования.

З а м е ч а н и е 1. Если важную роль играет прибыль, то в модели вместо минимизации затрат на производство продукции рассматривают максимизацию прибыли $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max$, где p_j — прибыль от использования j-й технологии с единичной интенсивностью.

Замечание 2. Если допускается перевыполнение плана, то в модели используют неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant Q_i \quad (i \in M),$$

где M — множество тех видов продукции, для которых допускается перевыполнение плана. В такой постановке модель технико-экономического планирования выражена в виде задачи линейного программирования, для решения которой можно применить симплекс-метод.

МАКСИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКА КОМПЛЕКТНОЙ ПРОДУКЦИИ

При выпуске продукции, состоящей из деталей, необходимо распределить комплектующие изделия между цехами так, чтобы достичь наибольшего числа комплектов. В модели технико-экономического планирования используется критерий максимума выпуска продукции в заданном ассортиментном соотношении.

Введем обозначения:

j — вид технологии;
n — число видов технологий;
x_j — интенсивность использования j-й технологии;
i — вид детали (комплектующего изделия);
l — число видов выпускаемых изделий;
l_i — число деталей i-го вида, необходимых для комплектования единицы выпускаемой продукции;
s — вид ресурса (сырья, энергии и т. д.);
k — число видов выделяемых ресурсов;
b_s — количество выделяемого ресурса s-го вида;
a_{ij} — норма выпуска деталей i-го вида при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью;
b_{sj} — норма использования (расхода) s-го вида ресурсов при применении j-й технологии с единичной интенсивностью;
z — число единиц выпускаемой комплектной продукции.

Математическая модель

$$z \to \max;$$

$$\frac{1}{l_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant z \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ l);$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{sj}x_j \leqslant b_s \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k);$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Эта модель выражена в виде задачи линейного программирования, решая которую получаем оптимальный план использования технологий x_j; $j = 1, 2, \ldots, n$.

МАКСИМИЗАЦИЯ ИЗГОТОВЛЯЕМОЙ КОМПЛЕКТНОЙ ПРОДУКЦИИ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОСТИ ЦЕХОВ

Модель определяет программу выпуска деталей цехами, при которой максимизируется выпуск комплектной продукции.

Введем обозначения:

i — вид деталей, из которых формируется комплектная продукция;
l — число видов деталей;
r — вид станка (цеха), где изготовляются детали (каждый станок может выпускать детали только одного вида);
R — число видов станков (цехов);
b_r — число станков (цехов) r-го вида;
l_i — число деталей i-го вида, необходимых для комплектации единицы выпускаемой продукции;
a_{ir} — число деталей i-го вида, которые можно произвести на одном станке (цехе) r-го вида за единицу времени;
x_{ir} — число станков (цехов) r-го вида, которые должны выпускать детали i-го вида.

Математическая модель:

$$z \to \max;$$

$$\frac{1}{l_i}\sum_{r=1}^{R} a_{ir}x_{ir} \geqslant z \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ l);$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_{ir} = b_r \quad (r = 1,\ 2,\ \dots,\ R);$$

$$x_{ir} \geqslant 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ l;\ \ r = 1,\ 2,\ \dots,\ R).$$

Модель выражена в виде задачи линейного программирования. Решив эту задачу известным методом, получим оптимальный план загрузки станков (цехов) по выпуску деталей.

Пример 2. На предприятии имеется $R = 5$ типов станков ($r = 1, 2, 3, 4, 5$), надо выпустить $l = 2$ видов деталей ($i = 1, 2$). Комплект состоит из двух видов изделий 1-го вида ($l_1 = 2$) и одного изделия 2-го вида ($l_2 = 1$). Число станков 1-го вида $b_1 = 5$, 2-го вида $b_2 = 3$, 3-го вида $b_3 = 40$, 4-го вида $b_4 = 9$, 5-го вида $b_5 = 2$. Возможность производства за один месяц деталей в штуках на станках приведена в табл. 2.

2. Норма производства деталей на станках за 1 месяц

Вид детали	Вид станка				
	1	2	3	4	5
1	100	400	20	200	600
2	15	200	2,5	50	250

Тогда математическая модель задачи следующая:

$$z \to \max;$$

$$\frac{1}{2}(100x_{11} + 400x_{12} + 20x_{13} + 200x_{14} + 600x_{15}) \geqslant z;$$

$$15x_{21} + 200x_{22} + 2{,}5x_{23} + 50x_{24} + 250x_{25} \geqslant z;$$

$$x_{11} + x_{12} = 5;\ \ x_{12} + x_{22} = 3;\ \ x_{13} + x_{23} = 40;$$

$$x_{14} + x_{24} = 9;\quad x_{15} + x_{25} = 2.$$

Решая эту задачу известными методами, получаем план загрузки станков: $x_{21} = x_{12} = x_{23} = x_{15} = 0$; $x_{11} = 5$; $x_{22} = 3$; $x_{13} = 40$; $x_{14} = 6$; $x_{25} = 2$; $x_{24} = 3$; $z = 1250$.

МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОЩНОСТЕЙ

Объем выпуска продукции зависит от мощности технологического оборудования, наличия производственных мощностей, степени и порядка их использования. В результате решения задачи использования производственных мощностей определяют оптимальное распределение номенклатуры изделий по группам оборудования данного предприятия. Построение математических моделей зависит от универсализации оборудования. Поэтому рассмотрим два типа моделей: 1-я для невзаимозаменяемых групп оборудования, 2-я для взаимозаменяемых групп оборудования.

МОДЕЛЬ ЗАГРУЗКИ НЕВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ ГРУПП ОБОРУДОВАНИЯ

Введем обозначения:

j — вид технологии;
n — число видов технологий;
i — вид производимой продукции;
l — число видов производимой продукции;
p_{ij} — прибыль, получаемая от реализации единицы продукции i-го вида, произведенной по j-й технологии;
r — вид оборудования;
R — число видов оборудования;
b_r — полезное время работы оборудования r-го вида;
a^r_{ij} — норма расхода машинного времени r-го оборудования при изготовлении единицы продукции i-го вида по j-й технологии;
x_{ij} — количество продукции i-го вида, производимой по j-й технологии.

Математическая модель заключается в максимизации прибыли при ограниченной возможности оборудования:

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{n} a^r_{ij}x_{ij} \leqslant b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R);$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Модель сформирована в виде задачи линейного программирования, решая которую известными методами, получаем оптимальный план x_{ij} загрузки невзаимозаменяемого оборудования.

Пример 3. На заводе имеется $R = 3$ группы оборудования ($r = 1, 2, 3$), на которых изготовляется $l = 3$ вида продукции ($i = 1, 2, 3$) по $n = 3$ видам технологий ($j = 1, 2, 3$). Данные для составления модели приведены в табл. 3.

Математическая модель:

$$11x_{11} + 7x_{12} + 5x_{13} + 9x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 18x_{31} + 15x_{32} \to \max;$$
$$2x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 3x_{21} + 4x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} \leqslant 20;$$
$$3x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + 5x_{31} + 6x_{32} \leqslant 34;$$
$$x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + x_{31} \leqslant 48;$$
$$x_{ji} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3; \; j = 1, 2, 3).$$

Решая поставленную задачу, например, симплекс-методом, получаем оптимальный план загрузки оборудования: $x_{12} = 10$, $x_{22} = 12$ тыс. шт., остальные значения $x_{ij} = 0$. Прибыль составит $7 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 142$ тыс. руб.

3. Показатели производства продукции завода

		Нормативные коэффициенты a^r_{ij}									Тыс. станко-часов
		$i=1$			$i=2$			$i=3$			
		$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	
Группы оборудования	$r=1$	2	2	1	3	0	4	3	3	0	20
	$r=2$	3	1	2	1	2	0	5	6	0	34
	$r=3$, станко-часов	0	1	3	2	3	1	1	0	0	48
Прибыль	p_{ij}, тыс. руб.	11	7	5	9	6	7	18	15	0	
Выпуск продукции	x_{ij}, тыс. шт.	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	

Замечание 1. Модель загрузки невзаимозаменяемых групп оборудования может решаться по критерию минимума затрат

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

при ограничениях: на выпуск продукции

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

на ресурсы

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} a^r_{ij} x_{ij} \leqslant b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R)$$

и на неотрицательность

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \quad j = 1, 2, \ldots, n),$$

где c_{ij} — стоимость затрат на производство единицы продукции i-го вида по j-й технологии; Q_i — плановый объем выпуска i-й продукции.

Это также задача линейного программирования.

Замечание 2. Модель загрузки невзаимозаменяемых групп оборудования может решаться по критерию минимума затраченного станочного времени

$$\sum_{r=1}^{R} y_r \to \max,$$

при ограничениях: на выпуск продукции

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l),$$

на используемое станочное время

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{r} x_{ij} + y_r = b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R)$$

и на неотрицательность переменных

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \quad j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$y_r \geqslant 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, R),$$

где y_r — недоиспользованное время работы станков r-го вида; Q_i — плановый объем производства продукции i-го вида.

Это также задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ЗАГРУЗКИ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ ГРУПП ОБОРУДОВАНИЯ

Для составления плана выпуска продукции на предприятии, имеющем универсальное оборудование разной производительности при выполнении разных операций (изделий), можно провести расчеты программы с помощью следующей модели.

Введем обозначения:

r — вид станка (оборудования);
R — число видов станков;
i — вид производимой продукции;
l — число видов производимой продукции;
λ_{ri} — норма затрат времени r-го вида станка на производство единицы i-го вида продукции;
p_{ri} — прибыль, получаемая предприятием от реализации единицы i-го вида продукции, произведенной на r-м виде станков;
x_{ri} — количество продукции i-го вида, производимой на r-м виде оборудования;
Q_i — плановый объем производства продукции i-го вида;
b_r — фонд времени работы станков r-го вида;
c_{ri} — себестоимость производства единицы продукции i-го вида на r-м виде станков.

Математическая модель: максимизация прибыли $\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{l} p_{ri} x_{ri} \to \max$ или минимизация затрат $\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{l} c_{ri} x_{ri} \to \min$ при ограничениях на выпуск продукции и фонд машинного времени

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ri} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_{ri} x_{ri} \leqslant b_r \quad (r = 1, 2, \ldots, R);$$

$$x_{ri} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l; \quad r = 1, 2, \ldots, R).$$

Это задача распределительного типа, которую можно решить специальным методом или симплекс-методом для линейного программирования.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ ПО ВИДАМ РАБОТ

Имеется R видов работ и R видов оборудования. Надо назначить один и только один станок для выполнения определенного вида работы. Эффективность выполнения работ на различном оборудовании можно рассчитывать согласно следующей модели.

Введем обозначения:

r — вид оборудования;
R — число видов оборудования;
i — вид работы;
R — число видов работы;
a_{ir} — эффективность (прибыль), получаемая при выполнении i-го вида работы на r-м виде оборудования;
x_{ir} — неизвестная величина, равная 0, если i-й вид работы не выполняется на r-м виде оборудования, и равная 1, если i-й вид работ выполняется на r-м виде оборудования.

Математическая модель:

$$\sum_{i=1}^{R} \sum_{r=1}^{R} a_{ir} x_{ir} \to \max;$$

$$\sum_{r=1}^{R} x_{ir} = 1, \quad \sum_{i=1}^{R} x_{ir} = 1, \quad x_{ir}(1 - x_{ir}) = 0.$$

Это задача нелинейного программирования.

Пример 4. Имеется $R = 3$ вида станков и 3 вида работ. Прибыль a_{ir} от закрепления работ за станками следующая:

Виды станков \ Виды работ	1	2	3
1	2	2	5
2	3	4	3
3	4	1	7

Требуется распределить виды работ по одной на каждый станок так, чтобы общая суммарная прибыль была наибольшей.

Математическая модель:

$$2x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 4x_{31} + x_{32} + 7x_{33} \to \max;$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1; \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1; \quad x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1;$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1; \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1; \quad x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1;$$
$$x_{11}(1 - x_{11}) = 0; \quad x_{12}(1 - x_{12}) = 0; \quad x_{13}(1 - x_{13}) = 0;$$
$$x_{21}(1 - x_{21}) = 0; \quad x_{22}(1 - x_{22}) = 0; \quad x_{23}(1 - x_{23}) = 0;$$
$$x_{31}(1 - x_{31}) = 0; \quad x_{32}(1 - x_{32}) = 0; \quad x_{33}(1 - x_{33}) = 0.$$

Решая задачу, получаем: $x_{13} = x_{22} = x_{31} = 1$; $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{23} = x_{32} = x_{33} = 0$; т. е. надо назначить работу 3-го вида на 1-й станок, 2-го вида на 2-й станок, 1-го вида на 3-й станок и при этом будет максимальная эффективность (прибыль $5 + 4 + 4 = 13$ ед.).

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ ПО МЕСТАМ

При обработке деталей на нескольких станках необходимо перевозить их от станка к станку в зависимости от технологии производства. В массовом производстве имеет смысл расположить станки таким образом, чтобы общие суммарные перевозки деталей были наименьшими.

Введем обозначения:

i, j — номера станков;
n — число всех станков;
l, r — номера мест, где можно расположить станки;
n — число всех мест, где можно расположить станки;
a_{ij} — стоимость перевозки всех деталей на единицу расстояния от i-го до j-го станка;
A — матрица элементов a_{ij};
c_{lq} — расстояние между l-м и q-м пунктами;
C — матрица элементов c_{lq};
$T = \begin{Bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{Bmatrix}$ — подстановка, которая означает, что t_k-й станок будет расположен в k-м месте ($k = 1, 2, \ldots, n$);
$c_{t_i t_j}$ — расстояние между i-м и j-м станком, если станки назначены на места согласно подстановке T;
$C(T)$ — матрица, состоящая из элементов $c_{t_i t_j}$ (матрица $C(T)$ образуется из матрицы C путем перестановки в C строк и столбцов согласно подстановке T).

Тогда задача состоит в нахождении такой подстановки T^*, при которой достигается минимум общей стоимости перевозок деталей

$$M(A, C(T)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{t_i t_j} \to \min,$$

т. е.

$$\min_T M(A, C(T)) = M(A, C(T^*)).$$

Сформулированная задача является квадратичной задачей о назначениях. Для решения такой задачи нет эффективных точных методов решения, но имеются достаточно приемлемые приближенные методы, один из которых приведен в гл. 8.

Пример 5. Имеется четыре станка, которые надо расположить на одной прямой линии на одинаковом расстоянии друг от друга. Расстояние между соседними станками принимается за единицу. Расстояния c_{lq} и стоимость перевозок на единицу расстояния a_{ij} заданы в виде матриц

$$C = (C_{lq}) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad A = (a_{ij}) = \begin{Vmatrix} 0 & 4 & 8 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Требуется разместить станки таким образом, чтобы общая стоимость перевозок была наименьшей. Заметим, что обе матрицы симметричные, поэтому вычисления будут проще. Если расположить 1-й станок на 1-е место, 2-й на 2-е, 3-й на 3-е, 4-й на 4-е, то общие затраты на перевозку $M = (1 \times 4 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4) \cdot 2 = 92$.

Рассчитаем функцию

$$L(A, C(T_{rs})) = 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, s}} (a_{ir} - a_{is})(c_{ts} - c_{tr}).$$

Очевидно функция L всегда симметрична относительно своих аргументов r и s. Поэтому ее значение можно вычислить только для $r < s$.

Проведя вычисления, получаем:

$$L(A, C(T_{rs})) = \left\{ \begin{array}{l} -18 \text{ при } r = 1,\ s = 2;\ -4 \text{ при } r = 1,\ s = 3; \\ -6 \text{ при } r = 1,\ s = 4; \\ -6 \text{ при } r = 2,\ s = 3;\ -4 \text{ при } r = 2,\ s = 4; \\ +2 \text{ при } r = 3,\ s = 4 \end{array} \right\}.$$

Так как для этой функции имеются отрицательные значения, то выберем наименьшее из них, —18, полученное при $r = 1$ и $s = 2$. Полагая $r_1 = 1$, $s_1 = 2$, получаем подстановку $T_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$ и образуем матрицу C_1. Для этой цели в матрице C сначала переставим 1-й и 2-й столбцы, а затем в полученной матрице поменяем местами 1-ю и 2-ю строки. Выполняя действия последовательно, получаем:

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Теперь вычислим значения для $L(A, C_1(T_{rs}))$, они оказываются все положительными. Поэтому вычисляем $M_1 = M(A, C_1) = 74$. Как видно, затраты существенно снизятся на 18 ед., если 1-й станок поставить на 2-е место, а 2-й на 1-е. Выберем случайную подстановку $T_2 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$ и вычислим для нее матрицу

$$C_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

и значения

$$L(A, C_2(T_{rs})) = \left\{ \begin{array}{l} 18 \text{ при } r = 1,\ s = 2;\ 12 \text{ при } r = 1,\ s = 3; \\ -6 \text{ при } r = 1,\ s = 4; \\ -6 \text{ при } r = 2,\ s = 3;\ 12 \text{ при } r = 2,\ s = 4; \\ -2 \text{ при } r = 3,\ s = 4. \end{array} \right\}$$

Выбираем наименьшее отрицательное значение —6, полученное при $r = 1$, $s = 4$. Полагая $r_1 = 1$, $s_1 = 4$, делаем в матрице C_2 перестановку T_{14}. Тогда получим

$$C_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Для матрицы C_3 составляем $L(A, C_3(T_{rs}))$ и получаем, что все ее значения положительны. Поэтому вычисляем $M_2 = M(A, C_3) = 70$, возможное при подстановке $T^* = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{Bmatrix}$, которая получена из подстановки T_2 путем перемены местами в ней чисел 2 и 3, стоящих на 1-м и 3-м местах. В соответствии с подстановкой, надо 3-й станок поместить на 1-е место, 1-й на 2-е, 4-й на 3-е, 2-й на 4-е.

Очевидно, $M_2 < M_1$, поэтому следует взять еще случайную подстановку и для нее получить локальный минимум. Например, взяв подстановку $T_3 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$, получим:

$$C_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

и вычислим для нее значения функции

$$L(A, C_4(T_{rs})) = \left\{ \begin{array}{l} 18 \text{ при } r=1,\ s=2;\ 12 \text{ при } r=1,\ s=3; \\ -6 \text{ при } r=1,\ s=4; \\ -6 \text{ при } r=2,\ s=3;\ 12 \text{ при } r=2,\ s=4; \\ -2 \text{ при } r=3,\ s=4. \end{array} \right\}$$

Поскольку минимальное значение -6 достигается при $r_1 = 1$, $s_1 = 4$ либо при $r_1 = 2$, $s_1 = 3$, то выбирая первую возможность и произведя перестановку пар T_{14}, получаем:

$$T_4 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix} \right\} \text{ и } C_5 = \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Для этой матрицы $L(A, C_5(T_{rs})) \geqslant 0$, поэтому вычислим $M_3 = M(A, C_5) = 70$.

Итак, значения минимальных затрат в 70 ед. повторились. Следовательно, T_4 и T^*, дающие одно и то же значение затрат, можно считать оптимальным решением. Абсолютный минимум затрат составляет 70 ед.

Итак, оптимальными размещениями будут следующие: а) 3-й станок на 1-е место, 1-й на 2-е, 4-й на 3-е, 2-й на 4-е; б) 2-й станок на 1-е место, 4-й на 2-е, 1-й на 3-е, 3-й на 4-е, при этом общие затраты составят 70 ед., что на 22 ед. меньше первоначального (единичного) назначения.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНЫХ СМЕСЕЙ

Задача состоит в определении набора компонентов продуктов, из которых необходимо получить смесь, обладающую определенными свойствами при минимальных затратах.

Введем обозначения:

j — вид продукта, из которого образуется смесь;
m — число видов продуктов, необходимых для получения смеси;
i — вид свойства, которым должна обладать смесь;
n — число всех видов свойств;
R_i — количественная характеристика i-го вида свойства;
a_{ij} — содержание i-го вида свойства в единице j-го вида продукции;
c_j — стоимость единицы j-го вида продукта;
a_j — наименьшее возможное количество j-го продукта, необходимого для смеси;
b_j — наибольшее возможное количество j-го продукта, необходимого для смеси;
x_j — искомое количество продукта j-го вида, необходимое для смеси.

Математическая модель. Найти такие $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, при которых $\sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \min$ и будут выполнены свойства

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geqslant R_i,\ i = 1, 2, \ldots, n;\quad a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,\quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Это задача линейного программирования.

Пример 6. На металлургическом заводе производится чугун из различного вида шихтового материала. Требуется определить оптимальный набор шихтового материала, чтобы получить чугун, обладающий определенным

содержанием серы, фосфора, марганца и других компонентов при наименьшей стоимости. Тогда в модели будут следующие обозначения:

j — виды шихтового материала, из которых получается чугун;
m — число видов шихтового материала, необходимых для получения чугуна;
i — вид компонента (фосфор, сера, марганец и т. д.), который должен быть в чугуне;
n — число видов компонента;
R_i — количество i-го компонента, которое должно быть в чугуне;
a_{ij} — содержание i-го вида компонента в единице j-го вида шихтового материала;
a_j — наименьшее количество j-го вида шихтового материала, необходимого для чугуна;
b_j — наибольшее количество j-го вида шихтового материала, который может использоваться для чугуна;
x_j — количество шихтового материала j-го вида, необходимого для получения чугуна;
c_j — стоимость единицы j-го шихтового материала.

Математическая модель:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = R_i; \quad a_j \leqslant x_j \leqslant b_j.$$

Используя модель, можно определить оптимальный набор шихтовых материалов, при котором стоимость чугуна будет наименьшей и будут выполняться ограничения на содержание компонентов в группе.

МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСКРОЯ МАТЕРИАЛОВ

На многих промышленных предприятиях при массовом производстве продукции необходимо получить наиболее рациональный раскрой материалов (доски, листы металла, трубы, прокат, рулоны ткани и т. д.). План раскроя считается оптимальным, если он обеспечивает больший выход заготовок или наименьший объем отходов. Такие задачи можно решать с помощью математических моделей.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСКРОЯ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЗАДАННОГО КОЛИЧЕСТВА ЗАГОТОВОК

На предприятие поступают однотипные рулоны материалов. Надо найти такой план раскроя рулонов материала по ширине, при котором будут наименьшие отходы.

Введем обозначения:

i — вид заготовки;
m — число всех видов заготовок;
j — вариант раскроя рулона по ширине;
n — число всех вариантов раскроя;
a_i — заданное число заготовок i-го вида;
a_{ij} — число заготовок i-го вида, которое можно получить из одного рулона согласно j-му варианту раскроя;
c_j — отходы материала, получаемые из рулона материала согласно j-му варианту раскроя;
x_j — искомое число рулонов, раскраиваемых согласно j-му варианту.

Математическая модель:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$
$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Это задача линейного программирования, для решения которой можно применять симплекс-метод.

Пример 7. На предприятие поступают однотипные рулоны шириной 700 см, которые надо разрезать на заготовки трех видов: 1-й шириной 230 см, 2-й — 190 см, 3-й — 80 см. План заготовок следующий: $a_1 = 60$ шт., $a_2 = 90$ шт., $a_3 = 320$ шт. План должен выполняться с минимальными отходами. С этой целью составляют варианты j-го раскроя рулонов на заготовки и определяют a_{ij} количество заготовок i-го вида из одного рулона, получаемых согласно j-му варианту, и отходы c_j. Эти данные приведены в табл. 4.

4. Показатели раскроя рулонов

Вариант раскроя	Число заготовок из одного рулона			Отходы, см	Вариант раскроя	Число заготовок из одного рулона			Отходы, см
	1-го вида	2-го вида	3-го вида			1-го вида	2-го вида	3-го вида	
1	3	—	—	10	6	1	1	3	40
2	2	1	—	50	7	2	—	3	0
3	2	—	3	0	8	—	—	8	60
4	1	2	1	10	9	—	2	4	0
5	1	—	5	70					

Математическая модель:

$$10x_1 + 50x_2 + 0 \cdot x_3 + 10x_4 + 70x_5 + 40x_6 + 0 \cdot x_7 + 60x_8 + 0 \times x_9 \to \min$$

при ограничениях на план заготовок

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 = 60; \quad x_2 + 2x_4 + x_6 + x_9 = 90; \quad 3x_3 + 5x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 8x_8 + 4x_9 = 320; \quad x_j \geqslant 0, \ j = 1 \ldots 9.$$

Решением этой задачи является $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$, $x_3 = 30$, $x_8 = 6{,}25$, $x_9 = 45$. Отсюда следует, что минимальное количество отходов получится, если раскроить 30 рулонов по 3-му варианту (2 заготовки 1-го вида и 3 заготовки 3-го вида), 6,25 рулона раскроить по 8-му варианту (8 заготовок 3-го вида), 45 рулонов по 9-му варианту (2 заготовки 2-го вида и 4 заготовки 3-го вида). Тогда необходимо 30 + 45 + 6,25 = 81,25 рулона, а отходы составят 6,25 · 60 = 375 см.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСКРОЯ ПАРТИЙ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ КОМПЛЕКТОВ

На предприятие, изготовляющее комплекты, поступает сырье в виде партий материалов, имеющих свои размеры. Надо получить раскрой материалов, обеспечивающий выпуск максимального числа комплектов. Для формирования модели введем обозначения:

s — номер партии материала;
S — число всех видов партий материалов;
i — вид заготовки;

l_i — число заготовок l-го вида, необходимых для одного комплекта;
n — число всех видов заготовок;
a_s — количество материала одного размера в одной партии s-го вида;
j — номер варианта раскроя;
n_s — число вариантов раскроя для каждой единицы материала s-й партии;
a_{sji} — число заготовок i-го вида, получаемых из единицы материала s-й партии согласно j-му варианту раскроя;
x_{sj} — искомое количество единиц материала s-й партии, раскраиваемых согласно j-му варианту.

Тогда при раскрое всех партий будет получено заготовок $\sum_{s=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}$

и может быть собрано комплектов $\frac{1}{l_i} \sum_{s=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}$.

Поскольку число полных комплектов лимитируется теми заготовками, которые позволяют составить наименьшее число комплектов, то число полных комплектов

$$n = \min_i \frac{1}{l_i} \sum_{s=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}.$$

План x состоит в максимизации числа комплектов

$$\max_x \min_i \frac{1}{l_i} \sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj}$$

при условиях выполнения плана заготовок

$$\sum_{j=1}^{n_s} x_{sj} = a_s \quad (s = 1, 2, \ldots, S)$$

и неотрицательности компонентов

$$x_{sj} \geqslant 0, \quad s = 1, 2, \ldots, S, \quad j = 1, 2, \ldots, n_s.$$

Если через z обозначить число комплектов, то сформированная модель сводится к следующей задаче линейного программирования $z \to \max$ при ограничениях

$$\frac{1}{l_i} \sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{n_s} a_{sji} x_{sj} \geqslant z \quad (s = 1, 2, \ldots, S);$$

$$\sum_{j=1}^{n_s} x_{sj} = a_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, S);$$

$$z \geqslant 0, \; x_{sj} \geqslant 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, S; \quad j = 1, 2, \ldots, n_s).$$

Пример 8. На комбинат поступили две партии досок: 1-я состоит из $a_1 = 50$ шт. длиной по 6,5 м каждая, 2-я из $a_2 = 200$ шт. — по 4 м каждая. Из этих досок надо изготовить комплекты, состоящие из $l_1 = 2$ заготовок

по 2 м каждая и $l_2 = 1$ заготовки по 1,25 м. Надо так распилить доски, чтобы получить максимальное число комплектов. Варианты раскроя досок приведены в табл. 5.

Пусть x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14} — число досок длиной 6,5 м, которые надо распилить соответственно по 1, 2, 3, 4-му вариантам; x_{21}, x_{22}, x_{23} — число досок длиной 4 м, которые надо распилить по 1, 2, 3-му вариантам; z — число комплектов.

Тогда надо найти $z \to \max$ при следующих условиях:
число израсходованных досок должно соответствовать размеру партии $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$; $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200$,

5. Варианты раскроя досок

Вариант раскроя	Из досок 6,5 м		Из досок 4 м	
	Число заготовок длиной			
	2 м	1,25 м	2 м	1,25 м
1	3	—	2	—
2	2	2	1	1
3	1	3	—	3
4	—	5	—	—

количество заготовок должно составлять полные комплекты

$$\frac{1}{2}(3x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 2x_{21} + x_{22}) \geqslant z;$$

$$2x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + x_{22} + 3x_{23} \geqslant z.$$

Число комплектов и досок должно быть реальным:

$$z \geqslant 0;\ x_{sj} \geqslant 0,\ s = 1,\ 2;\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Решением этой задачи являются $x_{14} = 37{,}5$, $x_{12} = 12{,}5$, $x_{21} = 200$, $x_{13} = x_{11} = x_{22} = x_{23} = 0$; $z = 212{,}5$.
Произведя округления, получим: $x_{14} = 38$, $x_{12} = 12$, $x_{21} = 200$, $x_{13} = x_{11} = x_{22} = x_{23} = 0$; $z = 212$.
Наиболее выгодными оказались 2-й и 4-й варианты для досок длиной 6,5 м и 1-й вариант для досок — 4 м. В оптимальном варианте максимальное число комплектов составит 212 шт.

МОДЕЛИ ОПЕРАТИВНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Внутризаводские планы учитывают сроки выполнения производственной программы по выпуску продукции; распределение заданий по видам работ, оборудования с указанием последовательности обработки деталей и др. Для составления календарных планов производства используют оперативно-календарное планирование, т. е. моделирование производства во времени. Оптимальные календарные планы имеют большое значение для тех отраслей промышленности, где производится большое число сложных видов изделий и используется много различных станков.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ВО ВРЕМЕНИ

Для оптимизации планов выполнения заказов в единичном и мелкосерийном производстве может применяться модель объемно-календарного планирования.

Введем обозначения:

i — номер заказа;
m — число всех заказов;
k — номер производственного участка, состоящего из групп однородного оборудования;

K — число всех участков;

j — номер месяца, в котором начинает выполняться заказ;

t — номер месяца, в течение которого выполняется заказ;

T — число месяцев в плановом периоде (например, для квартала $T = 3$);

a_{ij}^{kt} — затраты станочного времени k-й группы оборудования по выполнению i-го заказа, если его можно начать в j-м месяце и выполнить в t-м месяце;

A^{kt} — располагаемый фонд станочного времени k-й группы в t-м месяце;

c_{ij} — суммарная трудоемкость выполнения i-го заказа, если его начали выполнять в j-м месяце;

x_{ij} — целочисленная переменная, равная 1, если i-й заказ начнет выполняться в j-м месяце, и равная 0, если i-й заказ не начнет выполняться в j-м месяце;

E_1 — множество номеров заказов, которые надо обязательно включить в план.

Критерий оптимальности — максимизация загрузки производственных мощностей:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} c_{ij} x_{ij} \to \max.$$

Ограничения: по фонду времени работы станков $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} a_{ij}^{kt} x_{ij} < A^{kt}$, $k = 1, 2, \ldots, K$; $t = 1, 2, \ldots, T$;

по обязательным включениям заказа в план $\sum_{j=1}^{T} x_{ij} = 1$, $i \in E_1$;

по необязательным включениям заказов в план $\sum_{j}^{T} x_{ij} \leqslant 1$, $i \overline{\in} E_1$;

по условию целочисленности $x_{ij}(x_{ij} - 1) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, T$.

Полученная модель сформирована в виде задачи целочисленного программирования.

Замечание: суммарную трудоемкость выполнения заказов можно вычислить по формуле $c_{ij} = \sum_{k} \sum_{t} a_{ij}^{kt}$.

МОДЕЛЬ ОБЪЕМНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В КРУПНОСЕРИЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Введем обозначения:

i — номер вида детали;

m — число всех видов деталей;

s — номер варианта загрузки участка;

S — число всех вариантов загрузки участка;

a_{is} — почасовая производительность участка по выпуску i-й детали согласно s-му варианту;

b_i — план по выпуску деталей i-го вида;

x_s — время работы по выпуску деталей согласно s-му варианту.

Критерий — минимизация суммарного времени $\sum_{s=1}^{S} x_s \to \min$.

6. Производительность станка по вариантам

№ детали	№ варианта																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	20	20	20	20	20										20					
2	10	10				10	10	10	10							10				
3			10	10						10	10	10	10				10			
4				15	15	15	15			15	15			15				15		
5						20					20	20		20					20	
6									10				10							10

При ограничениях на выпуск деталей $\sum_{s=1}^{S} a_{is}x_s \geqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$

и на неотрицательность переменных $x_s \geqslant 0$ $(s = 1, 2, \ldots, S)$.

Это задача линейного программирования.

Пример 9. На станке надо обработать 6 деталей $i = 1 \ldots 6$ в количестве $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 600$ шт., $b_6 = 1200$ шт. Имеется 20 вариантов обработки деталей, почасовая производительность станка по вариантам приведена в табл. 6. Обозначив x_s — количество часов работы станка согласно s-му варианту, получим:

$$\sum_{s=1}^{20} x_s \to \min$$

$$20x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 20x_5 + 20x_{15} = 600;$$
$$10x_1 + 10x_2 + 10x_6 + 10x_7 + 10x_8 + 10x_9 + 10x_{16} = 600;$$
$$10x_3 + 10x_4 + 10x_{10} + 10x_{11} + 10x_{12} + 10x_{13} + 10x_{17} = 600;$$
$$15x_2 + 15x_4 + 15x_5 + 15x_6 + 15x_7 + 15x_{10} + 15x_{11} + 15x_{14} + 15x_{18} = 600;$$
$$20x_7 + 20x_8 + 20x_{11} + 20x_{12} + 20x_{14} + 20x_{19} = 600;$$
$$10x_9 + 10x_{13} + 10x_{20} = 1200.$$

Решая эту задачу симплекс-методом, получаем: $x_4 = 30$ ч, $x_8 = 20$ ч, $x_9 = 40$ ч, $x_{11} = 10$ ч, $x_{13} = 20$ ч, $x_{20} = 60$ ч. Остальные варианты в оптимальном плане не используются: $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = x_{10} = x_{12} = x_{14} = x_{15} = x_{16} = x_{17} = x_{18} = x_{19} = 0$.

МОДЕЛЬ ОПЕРАТИВНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ МЕЛКОСЕРИЙНОГО ПРОИЗВОДСТВА С УЧЕТОМ РАВНОМЕРНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ ПЛАНА ВО ВРЕМЕНИ

Для формирования модели введем обозначения:

i — вид детали;

m — число видов деталей;

k — вид станка;
K — число всех видов станков;
p — номер очередности обработки детали;
r — число периодов (очередностей);
a_{ik} — трудоемкость обработки i-й детали на k-м станке (норма затрат времени на обработку детали);
h — степень приближения к равномерному распределению ($0 < h \leq 1$);
x_{ip}^{k} — равно 1, если i-я деталь на k-м станке обрабатывается в p-ю очередь, в противном случае равно нулю.

Критерий оптимальности — максимизация степени равномерности выполнения плана во времени $h \to \max$
при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}x_{ip}^{k} \geq \frac{h}{r}\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, K; \quad p = 1, 2, \ldots, r);$$

$$\sum_{p=1}^{r} x_{ip}^{k} = 1, \quad x_{ip}^{k}(x_{ip}^{k} - 1) = 0.$$

МОДЕЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАПУСКА ДЕТАЛЕЙ

Имеется несколько станков и деталей, которые должны обрабатываться в некоторой последовательности согласно определенному технологическому маршруту. Требуется определить такой порядок обработки деталей, при котором общее время обработки будет наименьшим.

Отрезок времени разбивается на несколько частей, равных единице времени.

Введем обозначения:

k — номер станка;
n — число видов станков;
i — номер детали;
m — число видов деталей;
r — номер интервала (части отрезка времени);
b_i — заданный план по выпуску деталей i-го вида;
a_{ik} — число деталей i-го вида, которое можно обработать на k-м станке за один интервал времени;
l — номер станка, на котором обработка деталей производится раньше, чем на k-м станке;
x_{ir}^{k} — та часть времени r-го интервала, в течение которой i-я деталь будет обрабатываться на k-м станке.

Ограничения: время обработки деталей на каждом станке в течение одного интервала

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ir}^{k} \leq 1;$$

план по обработке деталей должен быть выполнен

$$\sum_{r}\sum_{k} a_{ik}x_{ir}^{k} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

должна быть выдержана технологическая последовательность обработки деталей

$$a_{lk} \sum_{j=1}^{r} x_{ij}^{k} \leqslant a_{il} \sum_{j=1}^{r-1} x_{ij}^{k} \; (i = 1, 2, \ldots, m; \;\; k = 1, 2, \ldots, n).$$

Требуется найти такие x_{ir}^{k}, при которых наиболее поздний интервал времени r обработки деталей был наименьшим.

Задача сводится к решению задач линейного программирования. Для этого находят какое-либо допустимое решение (решение, удовлетворяющее ограничениям) и отмечают все неизвестные x_{ir}^{k} с наибольшим номером r. Пусть это $r = r_0$. В системе ограничений оставляют неизвестные x_{ir}^{k} с номерами r, не превышающими r_0, и минимизируют функцию

$$\gamma = \sum_{i} \sum_{k} x_{ir_0}^{k},$$

т. е. решают задачу линейного программирования и получают минимальное значение $\gamma = \gamma_0$. Если $\gamma_0 > 0$, это значит, что без интервала r_0 обойтись нельзя, следовательно задача решена и наименьшее время r_0 найдено.

Если $\gamma_0 = 0$, то без интервала r_0 можно обойтись. В этом случае отмечают наибольшее значение r_1, для которого хотя бы одно значение $x_{ir_1}^{k} > 0$, и снова повторяют процесс. Если получают $\gamma_1 = \min\limits_{x} \sum\limits_{i} \sum\limits_{k} x_{ir_1}^{k} > 0$, то без интервала r_1 обойтись нельзя и r_1 есть решение. Если $\gamma_1 = 0$, то повторяют процесс дальше до тех пор, пока не получают решение.

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Предприятию дается задание по выпуску изделий. Для их изготовления производят соответствующие операции (обработки деталей) на имеющихся станках. Надо увязать во времени все работы, так как операции выполняют в определенной последовательности. Все время работы станков разбивается на интервалы, в течение которых производится определенная операция.

Для формирования модели введем обозначения:

k — номер станка;
n — число станков;
i — номер вида деталей, обрабатываемых на станках;
m — число видов деталей;
u — номер операции, выполняемой над деталью;
p — номер очередности обработки детали;
t — момент времени;
T — промежуток времени обработки деталей;
p_{iu} — число деталей i-го вида, над которыми надо выполнить u-ю операцию;
a_{iu}^{k} — число обрабатываемых деталей i-го вида на k-м станке по выполнению u-й операции;
c_{iujv}^{k} — длительность переналадки k-го станка при переходе от обработки i-й детали по u-й операции к j-й детали по v-й операции;
x_{iup}^{k} — искомые величины, выражающие время обработки i-й детали по u-й операции на k-м станке в p-ю очередь;
w_{iu}^{k} — начальное число заготовок для деталей i-го вида, которые должны обрабатываться на k-м станке по u-й операции;

$w_{iu}^k(t)$ — общее число заготовок в момент времени t для деталей l-го вида, которые обрабатываются на k-м станке по u-й операции;

$A_{iu}^k(t)$ — число деталей i-го вида, поданных к моменту t на k-й станок для обработки по u-й операции;

$B_{iu}^k(t)$ — число деталей i-го вида, обработанных по u-й операции на k-м станке к моменту t;

C — затраты, связанные с обработкой деталей;

$\delta(x)$ — функция, равная 1 при $x > 0$ или 0 при $x \leqslant 0$;

λ — большое положительное число;

y_p^k — момент начала обработки предыдущей детали.

Математическая модель. Найти такие $x_{iup}^k \geqslant 0$, при которых минимизируются затраты C и выполняются условия по очередности обработки деталей

$$\sum_i \sum_u \delta(x_{iup}^k) \leqslant \sum_i \sum_u \delta(x_{iup-1}^k) \leqslant 1,$$

по длительности перерывов между выпусками станков (следующая обработка должна быть после окончания предыдущей работы и переналадки станка)

$$y_p^k + c_{iu/v}^k \leqslant x_{p+1}^k + [2 - \delta(x_{iup}^k) - \delta(x_{jvp+1}^k)]^\lambda,$$

по выполнению планового задания

$$\sum_k \sum_p a_{iu}^k x_{iup}^k \geqslant p_{iu},$$

по выполнению программы во времени

$$\sum_p \sum_i \sum_u x_{iup}^k \leqslant T,$$

по регулярности процесса обработки

$$w_{iu}^k(t) = w_{iu}^k + A_{iu}^k(t) - B_{iu}^k(t) \geqslant 0.$$

При конкретизации модели величины C, y_p^k, $w_{iu}^k(t)$, $A_{iu}^k(t)$, $B_{iu}^k(t)$ выражаются через искомые переменные x_{iup}^k. Однако большая конкретизация приводит к сложным задачам, которые невозможно решить. Поэтому рассматриваются более частные модели и задачи, имеющие практическое значение.

МОДЕЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАПУСКА ДЕТАЛЕЙ С УЧЕТОМ ПЕРЕНАЛАДКИ

На станках по определенному технологическому маршруту непрерывно обрабатываются детали. Требуется определить план работы станков, согласно которому общее время обработки деталей будет наименьшим.

Введем обозначения:

n — число станков;

m — число видов деталей;

i — вид детали;

u — номер операции;

k_{iu} — номер станка, на котором выполняется u-я операция по обработке i-го вида детали;

b_{iu} — затрачиваемое время при выполнении u-й операции для i-й детали;

τ_i — число операций по обработке i-го вида детали;

d_{iu} — запаздывание начального момента u-й операции по сравнению с начальным моментом u — 1-й операции i-го вида детали;

T_{iu} — длительность обработки передаточной партии i-го вида детали при u-й операции;

c_{ij}^k — длительность переналадки k-го станка при переходе от обработки i-го вида детали к j-му виду;

t_p^k — начальный момент p-й очередности обработки детали на k-м станке;

t — момент окончания всех работ;

x_{ip}^k — искомая величина, равная 1, если k-й станок в p-ю очередь обрабатывает i-ю деталь, и равная 0 во всех остальных случаях;

λ — большое положительное число.

В модели необходимо найти такие $x_{ip}^k \geqslant 0$, при которых общее время t минимальное и выполняются условия:
по величине запаздывания

$$d_{iu} > \max (T_{iu-1}, b_{iu-1} - b_{iu} + T_{iu}),$$

по выполнению одной операции для каждой детали

$$\sum_i x_{ip}^k = 1,$$

по количеству выполняемых операций

$$\sum_k \sum_p x_{ip}^k = r_i,$$

по соблюдению технологического процесса

$$t_p^k + d_{iu} \leqslant t_q^l + (2 - x_{ip}^k - x_{jq}^l)^\lambda,$$

по соблюдению очередности работ на каждом станке

$$t_p^k + b_{iu} + c_{il}^k \leqslant t_{p+1}^k + (2 - x_{ip}^k - x_{jp+1}^k)^\lambda,$$

по соблюдению окончания срока всех работ

$$t_p^{k_0} + b_{iu_0} \leqslant t,$$

где k_0 — номер станка, на котором i-й вид детали проходит последнюю обработку; u_0 — номер последней операции по обработке i-й детали.
Таким образом получим модель как задачу целочисленного линейного программирования.

МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ О ПЕРЕНАЛАДКАХ

Поскольку в общем виде задача о переналадках станков является сложной, то с целью упрощения сформулируем ее для одного станка. Пусть на имеющемся станке надо выполнить m различных операций. Длительность или стоимость переналадки от i-го вида операции к j-му обозначим через c_{ij}. Матрица $C = (c_{ij})$ характеризует длительность переналадок или стоимость переналадок. Требуется найти такую последовательность операций, при которой длительность переналадок будет наименьшей. Каждая операция может выполняться в порядке очередности. Если 1-ю операцию выполнить в 1-ю очередь, 2-ю — во 2-ю очередь, m-ю — в m-ю очередь, то затраты времени $C(E) = c_{11} + c_{22} + \ldots + c_{mm}$.

Если сделать перестановку $T = \begin{Bmatrix} 1, 2, \ldots, m; \\ t_1 t_2, \ldots, t_m \end{Bmatrix}$ очередности, т. е. t_1-ю операцию проводить в 1-ю очередь, t_2-ю во 2-ю очередь и т. д., t_m-ю в m-ю очередь, то затраты времени $C(T) = c_{t_1 t_2} + c_{t_2 t_3} + \cdots + c_{t_{m-1} t_m}$.

Требуется определить такую перестановку T, при которой затраты $C(T)$ будут наименьшими. Эту задачу можно поставить еще следующим образом. Пусть имеются две матрицы: матрица $C = (c_{ij})$ затрат времени и матрица

$$P = (p_{ij}) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матрица $C(T)$ образуется из матрицы C путем перестановки в ней строк и столбцов согласно подстановке T. Требуется определить такую подстановку T^*, при которой

$$C(T) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{t_i t_j} p_{ij} \to \min.$$

Обратная подстановка T^{-1} удовлетворяет равенству $T^{-1}\,T = \begin{Bmatrix} 1, 2, \ldots, m \\ 1, 2, \ldots, m \end{Bmatrix}$ и указывает оптимальный порядок очереди или переналадок. Очевидно, поставленная таким образом задача является частным случаем рассмотренной ранее задачи о размещении станков по местам. Следовательно, для ее решения можно применить изложенный выше метод или улучшенный метод (см. гл. 8).

Пример 10. Пусть матрица C стоимостей переналадок имеет вид (элемент c_{ij} означает стоимость в рублях переналадки при переходе станка от обработки i-й детали к j-й)

$$C = \begin{Vmatrix} 14 & 23 & 24 & 17 & 32 & 16 & 27 & 63 \\ 40 & 43 & 48 & 40 & 69 & 60 & 36 & 92 \\ 20 & 19 & 80 & 18 & 41 & 39 & 13 & 34 \\ 8 & 18 & 22 & 36 & 33 & 36 & 61 & 58 \\ 46 & 42 & 50 & 46 & 38 & 42 & 33 & 96 \\ 48 & 57 & 68 & 61 & 53 & 55 & 83 & 77 \\ 79 & 37 & 44 & 41 & 37 & 54 & 47 & 32 \\ 41 & 33 & 30 & 26 & 23 & 29 & 16 & 62 \end{Vmatrix}.$$

Требуется найти такую последовательность переналадок, при которой достигается минимум общей стоимости переналадок, т. е. надо найти такую подстановку $T = \begin{Bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & 8 \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_8 \end{Bmatrix}$, при которой достигает минимума общая стоимость переналадок $C(T) = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} c_{t_i t_j} p_{ij}$. Для решения задачи воспользуемся алгоритмом (см. гл. 8). Согласно первому шагу алгоритма вычислим значения $L(C(T_{rs}))$ (табл. 7) для $r < s$. Среди транспозиций $T_1 = T_{2,3}$ $T_2 = T_{2,6}$, $T_3 = T_{3,6}$, $T_4 = T_{3,7}$, $T_5 = T_{4,8}$, $T_6 = T_{5,6}$, для которых значения $L(C(T_{rs})) < 0$, имеются две незацепленные T_2 и T_5 и дающие вместе наименьшую сумму стоимости переналадок $L(C(T_2)) + L(C(T_5)) = -34 - 18 = -52$. Имеются еще две незацепленные транспозиции T_1 и T_6, для которых

7. Значения $L(C(T_{r,s}))$

r	s						
	2	3	4	5	6	7	8
2	0	—8	5	14	—34	30	26
3		0	4	35	—7	—2	43
4			0	30	23	3	—18
5				0	—36	74	22
6					0	7	44
7						0	16
8							0

значения L отрицательные, но они в сумме уменьшают стоимость переналадок на 44, что меньше, чем 52. Поэтому согласно алгоритму переходим ко второму шагу. В матрице C меняем местами 2-й и 6-й столбцы, а затем 2-ю и 6-ю строки, что соответствует транспозиции T_2, потом меняем местами 4-й и 8-й столбец, а затем 4-ю и 8-ю строки, что соответствует транспозиции T_5, и, таким образом, получаем

$$C^1 = \begin{Vmatrix} 14 & 16 & 24 & 63 & 32 & 23 & 27 & 17 \\ 48 & 55 & 68 & 77 & 53 & 57 & 83 & 61 \\ 20 & 39 & 80 & 34 & 41 & 19 & 13 & 18 \\ 41 & 29 & 30 & 62 & 23 & 33 & 16 & 26 \\ 46 & 42 & 50 & 96 & 38 & 42 & 33 & 46 \\ 40 & 60 & 48 & 32 & 69 & 43 & 36 & 40 \\ 79 & 54 & 44 & 32 & 37 & 37 & 47 & 41 \\ 8 & 36 & 22 & 58 & 33 & 18 & 61 & 36 \end{Vmatrix}.$$

В соответствии со вторым шагом алгоритма для матрицы C^1, вычисляем значения $L(C^1(T_{rs}))$ (табл. 8) для $r < s$. Из таблицы видно, что только одно значение функции L отрицательное — при $T_{6,7}$. Поэтому в матрице C^1 меняем местами 6-й и 7-й столбцы, а затем 6-ю и 7-ю строки и получаем

$$C^2 = \begin{Vmatrix} 14 & 16 & 24 & 63 & 32 & 27 & 23 & 17 \\ 48 & 55 & 68 & 77 & 53 & 83 & 57 & 61 \\ 20 & 39 & 80 & 34 & 41 & 13 & 19 & 18 \\ 41 & 29 & 30 & 62 & 23 & 16 & 33 & 26 \\ 46 & 42 & 50 & 96 & 38 & 33 & 42 & 46 \\ 79 & 54 & 44 & 32 & 37 & 47 & 37 & 41 \\ 40 & 60 & 48 & 92 & 69 & 36 & 43 & 40 \\ 8 & 36 & 22 & 58 & 33 & 61 & 18 & 36 \end{Vmatrix}.$$

Продолжаем второй шаг алгоритма и вычисляем значения $L(C^2(T_{r,s}))$ для $r < s$ (табл. 9). Из таблицы видно, что все ее значения $L \gg 0$, поэтому переходим к третьему шагу алгоритма: вычислим значение $D_1 = C^2_{12} + C^2_{23} + C^2_{34} + C^2_{45} + C^2_{56} + C^2_{67} + C^2_{78} + C^2_{81} = 16 + 68 + 34 + 23 + 33 + 37 + 40 + 8 = 259$, выберем наименьшее положительное значение $L(C^2(T_{r,s})) = 2$ при $T_{5,6}$. В матрице C^2 переставим местами 5-й и 6-й столбцы, а затем 5-ю и 6-ю строки и получим

8. Значения $L(C^1(T_{r,s}))$

r	s = 2	3	4	5	6	7	8
2	0	24	44	19	34	31	8
3		0	25	31	32	2	32
4			0	67	67	29	20
5				0	31	28	13
6					0	—9	57
7						0	98
8							0

9. Значения $L(C^2(T_{r,s}))$

r	s = 2	3	4	5	6	7	8
2	0	22	44	54	16	25	15
3		0	23	34	12	32	37
4			0	63	52	12	79
5				0	2	19	98
6					0	9	56
7						0	14
8							0

$$C^3 = \begin{Vmatrix} 14 & 16 & 24 & 63 & 27 & 32 & 23 & 17 \\ 48 & 55 & 68 & 77 & 83 & 53 & 57 & 61 \\ 20 & 39 & 80 & 34 & 13 & 41 & 19 & 18 \\ 41 & 29 & 30 & 62 & 16 & 23 & 33 & 26 \\ 79 & 54 & 44 & 32 & 47 & 37 & 37 & 41 \\ 46 & 42 & 50 & 96 & 33 & 38 & 42 & 46 \\ 40 & 60 & 48 & 92 & 69 & 36 & 43 & 40 \\ 8 & 36 & 22 & 58 & 61 & 33 & 18 & 36 \end{Vmatrix}.$$

Согласно алгоритму, к матрице C^3 снова применяем первый шаг. Вычисляем значения $L(C^3(T_{rs}))$ для $r < s$ (табл. 10). Из таблицы видно, что наименьшее значение $L = -19$ достигается при транспозиции $T_{4,5}$. Поэтому, согласно алгоритму, в матрице C^3 переставим местами 4-й и 5-й столбцы, затем 4-ю и 5-ю строки и получим

$$C^4 = \begin{Vmatrix} 14 & 16 & 24 & 27 & 63 & 32 & 23 & 17 \\ 48 & 55 & 68 & 83 & 77 & 53 & 57 & 61 \\ 20 & 39 & 80 & 13 & 34 & 41 & 19 & 18 \\ 79 & 54 & 44 & 47 & 32 & 37 & 37 & 41 \\ 41 & 29 & 30 & 16 & 62 & 23 & 33 & 26 \\ 46 & 42 & 50 & 33 & 96 & 38 & 42 & 46 \\ 40 & 60 & 48 & 36 & 92 & 69 & 43 & 40 \\ 8 & 36 & 22 & 61 & 58 & 33 & 18 & 36 \end{Vmatrix}.$$

10. Значения $L(C^3(T_{r,s}))$

r	s: 2	3	4	5	6	7	8
2	0	43	81	15	30	8	15
3		0	2	41	31	33	27
4			0	—19	10	78	114
5				0	—2	24	65
6					0	0	14
7						0	14
8							0

Согласно алгоритму, для матрицы C^4 вычисляем значения $L(C^4(T_{r,s}))$ для $r < s$ (табл. 11). Из таблицы видно, что имеется одно значение $L = -11$ при $T_{3,6}$. Поэтому в матрице C^4 делаем перестановку 3-го и 6-го столбцов, а затем 3-й и 6-й строк и получаем матрицу

$$C^5 = \begin{Vmatrix} 14 & 16 & 32 & 27 & 63 & 24 & 23 & 17 \\ 48 & 55 & 53 & 83 & 77 & 68 & 57 & 61 \\ 46 & 42 & 38 & 33 & 96 & 50 & 42 & 46 \\ 79 & 54 & 37 & 47 & 32 & 44 & 37 & 41 \\ 41 & 29 & 23 & 16 & 62 & 30 & 33 & 26 \\ 20 & 39 & 41 & 13 & 34 & 80 & 19 & 18 \\ 40 & 60 & 69 & 36 & 92 & 48 & 43 & 40 \\ 8 & 36 & 33 & 61 & 58 & 22 & 18 & 36 \end{Vmatrix}.$$

11. Значения $L(C^4(T_{r,s}))$

r	s: 2	3	4	5	6	7	8
2	0	49	58	61	19	8	15
3		0	48	42	—11	5	61
4			0	15	80	58	105
5				0	69	91	104
6					0	43	46
7						0	14
8							0

Согласно алгоритму, для матрицы C^5 вычисляем значения $L(C^5(T_{r,s}))$ для $r < s$ (табл. 12).

Из таблицы следует, что все $L \geqslant 0$. Поэтому вычисляем стоимость переналадок $D_2 = c^5_{12} + c^5_{23} + c^5_{34} + c^5_{45} + c^5_{56} + c^5_{67} + c^5_{78} + c^5_{81} = 16 + 53 + 33 + 32 + + 30 + 19 + 40 + 8 = 231$; выбираем наименьшее положительное значение $L = 9$ при $T_{7,8}$; делаем в матрице C^5 перестановку 7-ю и 8-ю столбцов, а затем 7-й и 8-й строк и получаем матрицу C^6. Вычисляем значения $L(C^6(T_{r,s}))$ и получаем, что среди этих значений имеется единственное отрицательное значение $L(C^6T_{7,8}) = -9$ при $T_{7,8}$. Согласно алгоритму, в матрице C^6 меняем

12. Значения $L(C^5(T_{r,s}))$

r	s						
	2	3	4	5	6	7	8
2	0	54	49	77	33	64	41
3		0	98	32	11	35	103
4			0	61	23	64	106
5				0	30	24	86
6					0	10	15
7						0	9
8							0

местами 7-й и 8-й столбцы, а затем 7-ю и 8-ю строки и получаем снова матрицу C^5. Поэтому надо перейти к четвертому шагу алгоритма, т. е. проверить выполнение достаточных условий минимума. С этой целью для матрицы C^5 составляем систему неравенств $c^5_{ii-1} - c^5_{ij} + v_{l+1} - v_j \leqslant 0$ и находим, что при $v_1 = 5$, $v_2 = -2$, $v_3 = 0$, $v_4 = 5$, $v_5 = 0$, $v_6 = -9$, $v_7 = -3$, $v_8 = -1$ эта система удовлетворяется. Следовательно, значение D_2 является минимальным. Матрица C^5 получилась из матрицы C с помощью подстановки $T = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 8 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{Bmatrix}$, которая образована с помощью транспозиций $T_{2,6}T_{4,8} \times T_{6,7}T_{5,6}T_{4,5}T_{3,6}$. Обратная подстановка $T^{-1} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 5 & 7 & 8 & 3 & 2 & 4 \end{Bmatrix}$ указывает оптимальную очередность переналадок: $1 \to 6 \to 5 \to 7 \to 8 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$ При этом будет достигнута наименьшая стоимость переналадок $D_2 = 231$ руб. В этом примере оптимальная подстановка является цикличной, она складывается из цикла длиной 7. Для получения такой подстановки понадобилось сделать 6 транспозиций. Чем меньшее число циклов входит в оптимальную подстановку, тем скорее находится решение задачи.

Глава 2

МОДЕЛИ НА УРОВНЕ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

В экономико-математических моделях сельскохозяйственных предприятий необходимо учитывать, что земля как главное средство производства сельского хозяйства обладает большой универсальностью по производству продукции; сельскохозяйственный труд менее специализирован и создает большие возможности перемены труда; в сельскохозяйственном производстве имеется большое разнообразие природно-климатических условий, обусловливающих относительно устойчивую дифференциацию производительности труда в различных районах; для сельского хозяйства характерна взаимозаменяемость производимой продукции; сельскохозяйственное предприятие является основным звеном, производящим сельскохозяйственную продукцию.

Экономико-математические модели и методы помогают решать многие задачи планирования и управления сельскохозяйственного производства.

БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО СОЧЕТАНИЯ ОТРАСЛЕЙ

Задача оптимального сочетания отраслей сельского хозяйства состоит в определении оптимального направления развития сельскохозяйственного предприятия по структуре производства и использованию ресурсов. В качестве критерия эффективности используется максимум прибыли.

Введем обозначения:

j — номер вида сельскохозяйственной продукции;
L — число видов сельскохозяйственной продукции;
l — число видов продукции земледелия;
$j = 1, 2, \ldots, l$ — вид продукции земледелия;
$j = l + 1, l + 2, \ldots, L$ — вид продукции животноводства;
s — номер вида производственного ресурса;
m — число видов производственных ресурсов;
b_s — объем s-го вида ресурса, выделяемого извне для производства продукции;
p_j — прибыль, получаемая сельскохозяйственным предприятием от реализации единицы j-го вида продукции;
x_j — объем производства j-го вида продукции, a_{sj} — норма затрат s-вида ресурса на производство единицы j-го вида продукции;
h — номер группы кормов;
H — число всех групп кормов;
i — номер вида элемента питания;
a_{ijh} — норма затрат i-го элемента питания по h-й группе кормов на производство единицы t-го вида продукции животноводства;
q_{ijh} — содержание i-го элемента питания в единице j-го вида культуры земледелия, используемой на корм по h-й группе кормов;
q_j — удельный вес j-й культуры, используемой на корм;
b_{ih} — число кормовых ресурсов (элементов питания i-го вида), входящих в h-ю группу кормов, поступающих извне на сельскохозяйственные предприятия.

Математическая модель. Найти такие объемы производства $x_j (j = 1, 2, \ldots, L)$ сельскохозяйственной продукции, при которых достигается максимум прибыли

$$\sum_{j=1}^{L} p_j x_j \to \max$$

и выполняются условия производства по выделяемым извне ресурсам

$$\sum_{j=1}^{L} a_{sj} x_j \leqslant b_s \quad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

по дополнительным кормам, производимым в данном хозяйстве,

$$\sum_{j=l+1}^{l} a_{ijh} x_j - \sum_{j=1}^{l} q_{ijh} q_j x_j \leqslant b_{ih} \quad (h = 1, 2, \ldots, H)$$

при неотрицательности переменных $x_j \geqslant 0$ ($j = 1, 2, \ldots, L$). Получена модель в виде задачи линейного программирования, для решения которой можно применить симплекс-метод и получить структуру производства продукции и использования ресурсов на сельскохозяйственном предприятии.

Пример 11. В колхозе производится зерно, кукуруза на силос и содержится крупный рогатый скот. Для выращивания сельскохозяйственных культур выделяется 10 тыс. га пашни, для содержания скота — 1 тыс. га есте-

ственных пастбищ, для производства всех работ — 200 тыс. чел.-дней трудовых ресурсов. На содержание одной коровы затрачивается 25 чел.-дней труда и 40 кормовых ед., при этом прибыль получается 460 руб. в год. С одного га естественных пастбищ можно получить 5 ц кормов. Кроме того, на корм отводится весь урожай кукурузы на силос и 20% валового сбора зерна. Остальные показатели производства приведены в табл. 13. Прямой прибыли от производства кукурузы на силос колхоз не имеет, она получается за счет использования кукурузы в качестве корма для скота. Требуется найти оптимальное сочетание производства продукции. Обозначим x_1 объем производства зерна в центнерах, x_2 — объем производства кукурузы на силос в центнерах, x_3 — число коров.

13. Показатели производства продукции земледелия

Наименование культуры	Урожайность в 1 га, ц	Затраты труда на 1 га, чел.-дни	Коэффициент перевода на кормовую единицу	Прибыль в 1 ц, руб.
Зерновые	20	2	1,1	4
Кукуруза на силос	400	20	0,2	—

Поскольку 20% зерна идет на корм скоту, то реализуется $(1—0,2)\ x_1$ зерна по цене 4 руб. за ц. Прибыль от одной коровы равна 460 руб. Общая прибыль составит

$$P = 4(1 - 0,2)x_1 + 460x_3 = 3,2x_1 + 460x_3 \to \max.$$

В задаче учитываются ограничения по кормам $40\ x_3 \leq 5000 + 0,25x_1 + 0,02x_2$, по пахотным землям $0,05x_1 + 0,0025x_2 \leq 10\,000$, по трудовым ресурсам $0,1x_1 + 0,05x_2 + 25x_3 \leq 20\,000$. Например, ограничение по кормам, в центнерах, формируется так: постоянная часть от 5000 ц получается за счет естественных пастбищ; $0,22x_1 = 1,1 \cdot 0,2x_1$ — за счет 20% зерна, идущего на корм; $0,2x_2$ — корма за счет кукурузы на силос. Потребление кормов — $40x_3$ для скота.

Для ограничений по пашне используют показатели урожайности: для получения 1 ц зерна требуется 1/20 га пашни, для получения 1 ц кукурузы 1/400 га.

Для ограничений по трудовым ресурсам используют трудозатраты на получение 1 ц зерна 2 · 1/20 чел.-дней, на получение 1 ц кукурузы на силос 1/400 · 20 чел.-дней, на содержание 1 коровы — 25 чел.-дней.

Решив полученную задачу, получим: $x_1 = 154214,6$ ц, $x_2 = 915708$ ц, $x_3 = 5552$ коров, $p = 3047280$ руб.

ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО СОЧЕТАНИЯ ОТРАСЛЕЙ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

В этой модели дополнительно к базовой модели используют следующие обозначения:

k — номер участка земли;
r — число всех участков земли;
a_{kj} — показатель урожайности j-й культуры на k-м участке земли;
x_{kj} — объем производства j-й культуры на k-м участке земли;
S_k – площадь k-го участка земли;

d_{kj} — часть общей площади k-го участка земли, используемая под повторный посев j-й культуры;

x_{kj}^1 — объем производства j-й культуры на k-м участке земли при повторном посеве;

p_{kj} — прибыль, получаемая от производства единицы j-й продукции на k-м участке земли;

p_{kj}^1 — прибыль, получаемая от производства единицы j-й культуры на k-м участке земли при повторном посеве;

b_{sjk} — норма затрат ресурсов s-го вида при выращивании единицы культуры j-го вида на k-м участке земли;

b_{sjk}^1 — норма затрат ресурсов s-го вида при выращивании единицы культуры j-го вида на k-м участке земли при повторном посеве;

t — номер сезона (лето, осень, зима, весна);

g — вид труда;

a_{gtjk} — норма затрат g-го вида труда в t-м сезоне на производство единицы j-й продукции земледелия на k-м участке земли;

T_{gt} — трудовые ресурсы g-го вида, имеющиеся в хозяйстве в t-м сезоне;

a_{gtj} — норма затрат g-го вида труда в t-м сезоне для производства единицы j-го вида продукции животноводства;

v — денежные средства хозяйства;

a_{vjk} — норма расходования денежных средств на производство единицы продукции земледелия j-го вида на k-м участке земли;

a_{vj} — норма расходования денежных средств на производство единицы продукции животноводства j-го вида;

w — вид минеральных удобрений;

a_{wjk} — норматив потребления минерального удобрения w-го вида на k-м участке земли при выращивании единицы культуры земледелия j-го вида;

b_w — объем выделяемых минеральных удобрений w-го вида;

α_j, β_j — минимально и максимально допустимые объемы производства продукции земледелия j-го вида;

Q_j^1, Q_j^2 — минимально и максимально допустимые объемы производства продукции животноводства j-го вида.

Математическую модель оптимального сочетания отраслей можно записать в виде: найти максимум прибыли

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{r} (p_{kj}x_{kj} + p_{kj}^1 x_{kj}^1) + \sum_{j=l+1}^{L} p_j x_j,$$

при ограничениях: по использованию сельскохозяйственных угодий

$$\sum_{j=1}^{L} \frac{x_{kj}}{a_{kj}} \leqslant S_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

по использованию земли для повторных посевов

$$\sum_{j=1}^{l} \frac{x_{kj}^1}{a_{kj}} - \sum_{j=1}^{l} \frac{d_{kj}^1}{a_{kj}} x_{kj} \leqslant 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

по использованию внешних ресурсов

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{r}(b_{sjk}x_{kj}+b_{sjk}^{1}x_{kj}^{1})+\sum_{j=l+1}^{l}a_{sj}x_j\leqslant b_s \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

по использованию кормов, производимых в хозяйстве

$$\sum_{j=l+1}^{L}a_{ijh}x_j-\sum_{j=1}^{j}q_jq_{ijh}\sum_{k=1}^{r}(x_{kj}+x_{kj}^{1})\leqslant b_{ih} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ H),$$

по использованию трудовых ресурсов

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{r}a_{gtjk}\sum_{k=1}^{r}(x_{kj}+x_{kj}^{1})+\sum_{j=l+1}^{L}a_{gtj}x_j\leqslant T_{gt},$$

по использованию денежных средств

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{r}a_{vjk}\sum_{k=1}^{r}(x_{kj}+x_{kj}^{1})+\sum_{j=l+1}^{L}a_{vj}x_j\leqslant v,$$

по минеральным удобрениям

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{r}a_{wjk}(x_{kj}+x_{kj}^{1})\leqslant b_w,$$

по объемам производства продукции

$$\alpha_j\leqslant\sum_{i=1}^{r}(x_{kj}+x_{kj}^{1})\leqslant\beta_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l);$$

$$Q_j^{1}\leqslant x_j\leqslant Q_j^{r} \qquad (j=l+1,\ l+2,\ \ldots,\ L).$$

Получена общая модель оптимизации сочетания отраслей в виде задачи линейного программирования, для решения которой можно применить симплекс-метод.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРМОВ

Модель используют для расчета оптимальных рационов питания при откорме и содержании отдельных групп животных. Задача состоит в оптимизации набора продуктов питания для животноводства с наименьшей стоимостью.

Введем обозначения:

i — вид питательного вещества;
n — число видов питательных веществ;
b_i — необходимое количество i-го питательного вещества для животного;
b_{ih} — норма содержания i-го питательного вещества в единице корма h-го вида;
c_h — стоимость единицы корма h-го вида;
a_h, b_h — нижняя и верхняя границы по использованию h-го вида корма;
x_h — искомое количество корма h-го вида.

Требуется определить такие x_h, при которых достигается минимум стоимости кормов

$$\sum_{h=1}^{H} c_h x_h \to \min$$

и выполняются ограничения по потребности в питательных веществах

$$\sum_{h=1}^{H} b_{ih} x_h \geqslant b_i,$$

по использованию кормов $a_h \leqslant x_h \leqslant b_h$ $(h = 1, 2, \ldots, H)$. Полученная модель сформирована в виде задачи линейного программирования, для решения которой применим симплекс-метод.

Пример 12. Надо определить оптимальный рацион питания для откорма свиней весом 30—40 кг со среднесуточным привесом 300—400 г.

Для откорма свиней используют ячмень, горох, сенную муку, рыбную муку. Содержание питательных веществ в 1 кг кормов приведено в табл.14.

14. Данные об использовании кормов

Наименование	Потребность	Ячмень	Горох	Сенная мука	Рыбная мука
Кормовые единицы, кг	1,6	1,2	1,25	0,76	0,8
Перевариваемый протеин, г	200	80	250	200	530
Кальций, г	12	1,2	1,5	13,7	67
Фосфор, г	9	3,3	4,0	1,7	32
Каротин, мг	12	1,6	2,5	101,8	0

Цена 1 кг ячменя 3 коп., гороха — 4 коп., сенной муки — 5 коп., рыбной муки — 7 коп. Пределы расхода ячменя 0,2—0,5 кг, гороха — 0,2—0,6 кг, сенной муки — 0,3—0,8 кг, рыбной муки — 0,2—0,6 кг.

Обозначим x_1 — количество ячменя, x_2 — гороха, x_3 — сенной муки, x_4 — рыбной муки в рационе питания свиней. Тогда модель следующая:

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \to \min;$$
$$1{,}2x_1 + 1{,}25x_2 + 0{,}76x_3 + 0{,}8x_4 \geqslant 1{,}6;$$
$$80x_1 + 250x_2 + 20x_3 + 530x_4 \geqslant 200;$$
$$1{,}2x_1 + 1{,}5x_2 + 13{,}7x_3 + 67x_4 \geqslant 12;$$
$$3{,}3x_1 + 4x_2 + 1{,}7x_3 + 32x_4 \geqslant 9;$$
$$1{,}6x_1 + 2{,}5x_2 + 101{,}8x_3 \geqslant 12;$$
$$0{,}2 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}5; \quad 0{,}2 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}6;$$
$$0{,}3 \leqslant x_3 \leqslant 0{,}8; \quad 0{,}2 \leqslant x_4 \leqslant 0{,}6.$$

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА КОРМОВ

Некоторые сельскохозяйственные предприятия могут специализироваться на производстве кормов. При этом обычно выращиваемые зерновые культуры частично используют на корма, а остальная часть — как зерно. Поэтому специализация сельскохозяйственного предприятия должна учитывать оптимальное сочетание производства кормов и сельскохозяйственной продукции. Оптимизация обычно проводится по критерию минимума себестоимости производства или максимума прибыли.

Для составления модели оптимизации производства кормов введем обозначения:

h — вид кормов;
j — вид сельскохозяйственной культуры;
r — вид сельскохозяйственной продукции;
H — число видов кормов;
l — число видов сельскохозяйственных культур;
R — число видов сельскохозяйственной продукции;
a_{jh} — норма выхода h-го вида корма из единицы j-й культуры;
b_{jr} — норма выхода r-го вида сельскохозяйственной продукции из единицы j-й культуры;
a_h — плановый объем производства h-го вида корма;
b_r — плановый объем производства r-го вида продукта;
c_j — себестоимость производства единицы j-го вида культуры;
x_j — искомый объем производства j-го вида культуры.

Модель оптимизации производства кормов состоит в нахождении таких $x_j \geqslant 0$ ($j = 1, 2, \dots, l$), при которых достигается минимум себестоимости

$$\sum_{j=1}^{l} c_j x_j \to \min$$

и выполняются ограничения: по плану выпуска кормов

$$\sum_{j=1}^{l} a_{jh} x_j \geqslant a_h \quad (h = 1, 2, \dots, H),$$

по плану выпуска продукции

$$\sum_{j=1}^{l} b_{jr} x_j \geqslant b_r \quad (r = 1, 2, \dots, R).$$

Таким образом, модель сформирована в виде задачи линейного программирования. В результате ее решения получим оптимальные объемы производства сельскохозяйственных культур, идущих на корма и продукцию.

Пример 13. Совхоз может выращивать три вида сельскохозяйственных культур ($j = 1, 2, 3$) себестоимостью 240, 120, 300 руб./т, из которых производят две группы кормов ($h = 1, 2$) и два вида продукции ($r = 1, 2$). Показатели производства кормов и продукции приведены в табл. 15. Обозначим

15. Показатели производства кормов и продукции

Показатели	Вид	Норма выхода кормов и продукции из следующих культур			План по выпуску кормов и продукции (в тыс. т)
		1	2	3	
Корм	1 2	8 4	0 1	1 3	8 5
Продукция	1 2	2 1	5 3	0 6	6 4

x_j — объем производства j-й культуры в тыс. т. Тогда модель оптимизации производства кормов запишется в виде: найти $x_j \geqslant 0$ ($j = 1, 2, 3$), при которых достигается минимальная себестоимость

$$C = 240x_1 + 120x_2 + 300x_3 \to \min$$

и учитываются ограничения по выполнению плана производства кормов $8x_1 + x_3 \geqslant 8$; $4x_1 + x_2 + 3x_3 \geqslant 5$ и производства продукции $2x_1 + 5x_2 \geqslant 6$; $x_1 + 3x_2 + 6x_3 \geqslant 4$. Решением этой задачи является $x_1 = 1$ тыс. т, $x_2 = 1$ тыс. т, $x_3 = 0$. Себестоимость $C = 360$ тис. руб.

Таким образом, с точки зрения минимизации затрат наиболее выгодно выращивать 1-й и 2-й виды сельскохозяйственных культур по 1 тыс.т, а 3-й вид культуры производить не рентабельно. При этом минимальные затраты составят 360 тыс. руб., будет выполнен план по производству кормов и 2-го вида продукции, а по производству 1-го вида продукции — перевыполнен на 1 тыс. т.

МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ И СТРУКТУРЫ ПОСЕВОВ

Основными ресурсами сельскохозяйственного предприятия являются земельные участки. Урожайность и, следовательно, уровень рентабельности хозяйства зависят от видов участков земли, выделяемых под сельскохозяйственные культуры. Поэтому с целью повышения эффективности производства сельскохозяйственных культур следует провести наилучшее распределение земельных угодий под выращиваемые культуры.

Для описания модели введем обозначения:

i — номер участка земли;
n — число всех участков земли;
j — вид сельскохозяйственной культуры;
l — число всех видов культур;
b_i — площадь i-го участка земли, га;
a_j — площадь, отводимая под j-ю культуру, га;
c_{ij} — себестоимость обработки единицы площади i-го участка под j-ю культуру;
x_{ij} — искомая площадь, отведенная на i-м участке под возделывание j-й культуры, га.

В этой модели размещения и структуры посевов требуется найти такие $x_{ij} \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, l$), при которых достигается минимум затрат

$$C = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

соблюдается баланс площадей

$$\sum_{j=1}^{l} a_j = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

и выполняются ограничения: по величине участков земли

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

по величине площади, отводимой для выращивания вида культуры,

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l).$$

Модель представляет собой транспортную задачу, для решения которой имеются эффективные методы. Она упрощена тем, что не учитывается урожайность культур. Если же принять во внимание этот фактор, то следует ввести дополнительные обозначения: a_{ij} — урожайность j-й культуры на i-м участке земли; d_j — план по производству j-й культуры.

Тогда модель будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при условиях выполнения плана по производству культур

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \geqslant d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l)$$

и использования имеющихся площадей

$$\sum_{j=1}^{l} x_{ij} \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В таком виде модель представляет собой распределительную задачу.

Пример 14. В колхозе имеются два участка земли ($i = 1, 2$), равные $b_1 = 10$ тыс. га, $b_2 = 15$ тыс. га. На этих участках надо производить два вида сельскохозяйственных культур: первый — зерно, второй — сахарную свеклу. Технико-экономические показатели производства продукции приведены в табл. 16. Необходимо определить x_{ij} — площадь i-го участка, отводимую под j-ю культуру. Тогда модель имеет вид

$$C = 4 \cdot 20x_{11} + 2{,}5 \cdot 200x_{12} + 2{,}5 \cdot 25x_{21} + 2{,}1 \cdot 250x_{22} \to \min.$$

16. Технико-экономические показатели производства сельскохозяйственных культур

Продукция	1-й участок земли		2-й участок земли		План производства, тыс. ц
	Урожайность, ц/га	Себестоимость, руб./ц	Урожайность, ц/га	Себестоимость, руб./ц	
Зерно	20	4,0	25	2,5	500
Сахарная свекла	200	2,5	250	2,1	400

при условиях использования имеющихся площадей земельных участков $x_{11} + x_{12} = 10\,000$; $x_{21} + x_{22} = 15\,000$, выполнения плана производства культур $20x_{11} + 25x_{21} \geqslant 500\,000$; $200x_{12} + 250x_{22} \geqslant 400\,000$ и реальности условий $x_{11} \geqslant 0$; $x_{12} \geqslant 0$; $x_{21} \geqslant 0$; $x_{22} \geqslant 0$.

Решением этой задачи является $x_{11} = 10$ тыс. га, $x_{21} = 13{,}4$ тыс. га, $x_{12} = 0$, $x_{22} = 1{,}6$ тыс. га, $C = 2\,477\,500$ руб.

Итак, в соответствии с оптимальным планом для производства зерна надо отвести 10 тыс. га 1-го участка и 13,4 тыс. га 2-го участка земли, а для сахарной свеклы — 1,6 тыс. га 2-го участка земли. Тогда будут использованы все имеющиеся площади, произведено зерна $20x_{11} + 25x_{21} = 535$ тыс. ц, сахарной свеклы $200x_{12} + 250x_{22} = 400$ тыс. ц и минимальные затраты составят 2 477 500 руб.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ СЕВООБОРОТА

Севооборот служит средством сохранения и повышения плодородия почвы, отображает технологию выращивания культур.

Введем обозначения:

i — номер вида севооборота;
m — число видов севооборота;
j — вид выращенной культуры;
l — число видов выращиваемых культур;
k — номер участка земли;
r — число всех участков земли;
p_{ik} — средняя прибыль от продукции с 1 га k-го участка при i-м севообороте;
d_{jik} — часть площади k-го участка, выделяемая под посевы j-й культуры при i-м севообороте;
b_j — общая площадь, выделяемая под посевы j-й культуры;
S_k — площадь k-го участка земли;
x_{ik} — площадь, отводимая на k-м участке при i-м севообороте.

В модели необходимо найти x_{ik}, при которых достигается максимум прибыли

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} p_{ik} x_{ik} \to \max$$

при соблюдении условий по выделяемым площадям

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} d_{jik} x_{ik} \leqslant b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = S_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r);$$

$$x_{ik} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, r).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКА

В сельскохозяйственном производстве большое значение имеет использование машинно-тракторного парка. Интенсивность этого использования зависит от времени года и видов проводимых работ. Поэтому весьма важно так распределить имеющийся машинно-тракторный парк по видам работ в каждом периоде, чтобы при минимальных затратах выполнить план производства.

Для формирования модели введем обозначения:

i — вид работы;
n — число всех видов работ;
t — номер периода года;
T — число всех периодов года;
j — вид машины и трактора;
m — число всех видов машин и тракторов;
b_{jt} — количество возможных часов работы j-го вида машины или трактора в t-м периоде;
a_{it} — объем работ i-го вида, который надо выполнить в t-м периоде;

a_{ijt} — норма производства i-го вида работ j-м видом машины или трактора в t-м периоде;

c_{ijt} — стоимость производства единицы (одного часа) работы i-го вида j-м видом машины или трактора в t-й период;

x_{ijt} — искомый объем работ (в часах) i-го вида, который надо произвести j-м видом машины или трактора в t-м периоде.

Модель оптимального распределения машинно-тракторного парка состоит в нахождении таких значений x_{ijt} ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$; $t = 1, 2, ..., T$), при которых достигаются минимальные затраты

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} c_{ijt} x_{ijt} \to \min$$

и выполняются ограничения: по выполнению плана работ

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ijt} x_{ijt} = a_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; t = 1, 2, \ldots, T),$$

по использованию наличного парка машин и тракторов

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijt} \leqslant b_{jt} \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \; t = 1, 2, \ldots, T).$$

Полученная модель относится к классу распределительных задач. Решив такую задачу, найдем x_{ijt} — число часов работы j-го вида машины или трактора по выполнению i-й работы в t-м периоде. Зная λ_{jt} — время работы одной машины или трактора j-го вида в t-м периоде (в часах), можно определить потребность z_{jt} в j-м виде машин или тракторов в t-м периоде по формуле

$$z_{jt} = \frac{1}{\lambda_{jt}} \sum_{i=1}^{n} x_{ijt}.$$

Необходимое число z_j машин и тракторов j-го вида для хозяйства можно найти по формуле $z_j = \max_t z_{jt}$.

Решение такой задачи позволит наметить план использования имеющихся машин и тракторов.

МОДЕЛЬ ПОПОЛНЕНИЯ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКА

Если в результате решения задачи окажется, что имеющееся число сельскохозяйственных машин и тракторов недостаточно для выполнения плана работ, то можно рассчитать дополнительную потребность. С этой целью в модель вводят переменную y_{ijt}, означающую дополнительную потребность часов работы j-го вида машин или тракторов в t-м периоде для выполнения i-го вида работ, c_j — стоимость приобретения одной машины или трактора j-го вида, T_j — срок службы j-й машины или трактора.

Модель будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} c_{ijt} x_{ijt} + \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{T_j} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{ijt}}{\lambda_{jt}} \to \min$$

при ограничениях по выполнению плана работ и использованию парка машин

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ljt}(x_{ljt} + y_{ljt}) = a_{lt}, \ \sum_{l=1}^{n} x_{ljt} = b_{jt} + \sum_{l=1}^{n} y_{ljt}.$$

Решив эту задачу, найдем y_{ljt}, дополнительную потребность u_{jt} в машинах или тракторах j-го вида в t-м периоде

$$u_{jt} = \frac{1}{\lambda_{jt}} \sum_{l=1}^{n} y_{ljt},$$

а затем общую дополнительную потребность в j-м виде машин или тракторов

$$u_j = \max_t u_{jt} \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Экономико-математические модели оказывают большую помощь при выработке плановых и управленческих решений сельскохозяйственных предприятий в том случае, когда они обеспечены необходимой информацией. Однако в сельском хозяйстве, где большую роль играет состояние погоды и степень организации работ, многие показатели рассчитываются с большой погрешностью, и поэтому выводы, полученные на основе этой информации, должны быть тщательно проанализированы специалистами. Применить на практике полученные с помощью моделей решения можно только после их оценки специалистами в области сельского хозяйства.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКА

Необходимо определить оптимальное использование имеющихся машин на сельскохозяйственном предприятии и потребность в дополнительной технике для выполнения всего комплекса технологических операций в установленные агротехнические сроки с минимальными затратами.

Введем обозначения;

- l — вид работы;
- m — число всех видов работ;
- j — виды машины;
- n — число всех видов машин, имеющихся на предприятии;
- k — номер комплекса работ;
- N — число всех комплексов работ;
- r — вид дополнительных машин;
- R — число всех видов вновь привлекаемых машин;
- a_{ijk} — сменная производительность j-й машины на l-й работе k-го комплекса;
- A_{ik} — объем i-й работы в k-м комплексе;
- Q_j — число имеющихся машин j-го типа;
- p_{rk} — число машин r-го типа, которое можно привлечь дополнительно для выполнения k-го комплекса работ;
- q_{jk} — число машин j-го типа, выбывающих при выполнении k-го комплекса работ;
- c_{ijk} — прямые эксплуатационные затраты при выполнении i-й работы k-го комплекса j-м видом машины данного предприятия;
- t_k — продолжительность k-го комплекса работ;
- b_{ik} — коэффициент сменности выполнения i-й работы k-го комплекса;

s_{ijk} — затраты при выполнении работ i-го вида k-го комплекса машинами j-го типа, привлекаемыми дополнительно;

x_{ijk} — число машин j-го типа, которые надо использовать для i-й работы k-го комплекса;

y_{irk} — число машин r-го типа, которые необходимо приобрести для выполнения i-й работы k-го комплекса работ.

Математическая модель. Найти минимум затрат

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} c_{ijk} t_k b_{ik} x_{ijk} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{R} \sum_{k=1}^{N} s_{ijk} t_k b_{ik} y_{irk} \to \min$$

при ограничениях: на выполнение агротехнических сроков

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} t_k x_{ijk} + \sum_{r=1}^{R} a_{irk} t_k y_{irk} \leqslant A_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \ k = 1, 2, \ldots, N),$$

на возможности имеющегося парка машин

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leqslant Q_j - q_{jk} \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots, N),$$

на привлекаемые машины

$$\sum_{i=1}^{m} y_{irk} \leqslant p_{rk} \quad (r = 1, 2, \ldots, R; \ k = 1, 2, \ldots, N),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{ijk} \geqslant 0, \ y_{irk} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n; \ r = 1, 2, \ldots, R; \ k = 1, 2, \ldots, N).$$

Решая эту задачу, как задачу линейного программирования, определяем структуру используемого парка машин и число привлекаемых машин r-го типа

$$y_r = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} y_{irk} \quad (r = 1, 2, \ldots, R).$$

МОДЕЛЬ СОСТАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СХЕМ ВНЕСЕНИЯ УДОБРЕНИЙ

Необходимо получить оптимальную схему внесения минеральных удобрений различного вида под различные культуры на имеющиеся площади.

Введем обозначения:

j — вид культуры;
l — число всех видов культур;
i — вид смеси удобрений;
n — число всех видов смесей;
q — способ внесения удобрений;
Q — число всех способов внесения удобрений;
r — номер формы, в которой находится действующее вещество в удобрении (легко- или труднорастворимая);
h — вид органического удобрения;
B — число всех видов органических удобрений;

N_r, P_r, K_r — количество действующего вещества азота, фосфора и калия r-й формы, имеющегося на предприятии;

A — количество органических удобрений, имеющихся на предприятии;

H_h — количество h-го вида удобрения, имеющегося на предприятии;

$N_{ijqr}, P_{ijqr}, K_{ijqr}$ — количество действующего вещества азота, фосфора и калия r-й формы, вносимое по q-му способу в i-ю смесь под j-ю культуру на 1 га земли;

H_{ijqh} — количество органического удобрения h-го вида, вносимое по q-му способу в i-ю смесь под j-ю культуру на 1 га земли;

H_{ijq} — количество органического удобрения, входящего в i-ю смесь и используемое q-м способом под j-ю культуру;

S_{lq} — площадь посева под j-ю культуру, в которую можно внести удобрения по q-му способу;

a_{ijq} — логический коэффициент, равный 1, если можно внести i-ю смесь q-м способом под j-ю культуру, и равный 0 в противном случае;

C_{ijq} — эффективность (прибыль), получаемая при внесении i-й смеси q-м способом под j-ю культуру на 1 га земли;

x_{ijq} — число гектаров земли, отводимое под j-ю культуру с внесением i-й смеси удобрений q-м способом.

Математическая модель. Найти максимум прибыли

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} C_{ijq} x_{ijq} \to \max$$

при ограничениях: на азотные удобрения

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} N_{ijqr} x_{ijq} \leqslant N_r,$$

на фосфорные удобрения

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} P_{ijqr} x_{ijq} \leqslant P_r,$$

на калийные удобрения

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} K_{ijqr} x_{ijq} \leqslant K_r,$$

на органические удобрения

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} H_{ijq} x_{ijq} \leqslant A,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} H_{ijqr} x_{ijq} \leqslant H_h \quad (h = 1, 2, \ldots, B),$$

на имеющиеся площади

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijq}x_{ijq} \leqslant S_{jq} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ \ q = 1,\ 2,\ \ldots,\ Q),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{ijq} \geqslant 0 \ (i = 1,2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,2,\ \ldots,\ l;\ q = 1,2,\ \ldots,\ Q).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА ЗЕЛЕНЫХ КОРМОВ

Необходимо определить план производства зеленых кормов с минимальной площади.

Введем обозначения:

t — номер периода;
T — число всех периодов;
j — вид зеленого корма;
l — число видов зеленых кормов;
r — вид незеленого корма;
R — число видов незеленых кормов;
q_j — коэффициент кормовой ценности j-го вида корма (число кормовых единиц);
q_r — коэффициент кормовой ценности r-го вида корма;
A_t — потребность в кормах в t-й период;
B_j — максимальная потребность в зеленом корме j-го вида;
D_r — количество незеленого r-го вида корма, которое может быть использовано в период летне-лагерного содержания скота;
d_{tj} — урожайность j-й культуры (для зеленого корма) в t-й период;
x_{tj} — количество зеленого корма j-го вида в t-й период;
y_{tr} — количество незеленого корма r-го вида в t-й период.

Математическая модель. Найти минимальную площадь для выращивания культур на зеленый корм

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{l}\frac{x_{tj}}{d_{tj}} \to \min$$

при ограничениях на потребление кормов

$$\sum_{j=1}^{l} q_j x_{tj} + \sum_{r=1}^{R} q_r y_{tr} \geqslant A_t \quad (t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T);$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{tj} \leqslant B_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l),\ \sum_{t=1}^{T} y_{tr} \leqslant D_r \quad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ R).$$

МОДЕЛЬ ОБОРОТА И СТРУКТУРЫ СТАДА

В сельскохозяйственных предприятиях, имеющих животноводческие фермы, необходимо создать такие структуру и оборот стада, при которых можно получить наибольшее количество животноводческой продукции.

Структура стада — это соотношение между группами, отличающихся полом, возрастом, назначением. Оборот стада — процесс перевода животных из младшей группы к старшей. Оптимизация оборота и структуры стада означает определение поголовья животных на конец года в каждой группе животных при условии:

1) процент отбраковки животных на мясо по каждой группе животных и оборот стада должны обеспечить максимальное количество животноводческой продукции и структуру стада для нормального воспроизводства стада в будущем;

2) при переводе животных из младшей группы в старшую необходимо придерживаться сроков выращивания поголовья в соответствии с группами;

3) поголовье животных в каждой группе на конец планового периода должно отвечать рекомендациям рациональной структуры стада и плановым заданиям по формированию поголовья животных.

Введем обозначения:

i — номер группы животных;
n — число всех групп животных;
a_i — число животных i-й группы на начало года;
m_i — приплод каждого пола за год;
S_i — процент потерь животных i-й группы из-за падежа;
P_i — средний вес живого животного i-й группы на начало года;
x_i — процент отбраковки животных i-й группы на мясо;
y_i — поголовье животных на конец года i-й группы если выход поголовья на конец года для группы животных наперед планируется, то y_i этой группы считается постоянным;
γ — число животных, снимающихся с откорма на протяжении года;
z_i — число животных из i-й группы, переходящих из младшей в старшую группу;
v_i — число животных, переходящих в старшую возрастную группу.

Математическая модель. Найти максимум производства мяса за счет отбраковки животных

$$M = \sum_{i=1}^{n} 0{,}01 a_i x_i P_i + \sum_{i \in L} 0{,}01 x_i P_i m_i \to \max,$$

где L — множество тех групп животных, которые дают приплод при условиях баланса стада

$$a_i - 0{,}01 a_i x_i - 0{,}01 a_i S_i + z_i - v_i = y_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

для некоторых i величины z_i, v_i, a_i, y_i могут равняться нулю. Весь приплод за исключением отбракованных и погибших животных в текущем году должен быть переведен в группу молодняка до одного года $m_i = 0{,}01 m_i x_i + 0{,}01 m_i S_i + v_i$. Перевод в старшую возрастную группу животных старше одного года за исключением отбракованных и погибших животных $0{,}01 a_i x_i + v_i = a_i - 0{,}01 a_i S_i$, где i означает группу животных старшего возраста.

Использование экономико-математических моделей на практике дает возможность получить оптимальное решение, улучшающее плановые показатели на 10% по сравнению с традиционными методами. Реализация оптимизационных решений уменьшает расчетный эффект на 50%. Таким образом, реальный эффект составляет примерно 5%.

Глава 3

МОДЕЛИ НА УРОВНЕ ОТРАСЛИ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Отрасль — это сложная система, функционирующая во взаимодействии с другими подразделениями народного хозяйства, природой, обществом. Отраслевой принцип управления создает условия для проведения технической политики, концентрации и специализации производства. Экономико-математические модели и методы оказывают помощь при выработке плановых и управленческих решений отраслевых задач.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА ТЕХНОЛОГИЙ

Необходимо выбрать такие технологические способы производства продукции, при которых достигаются минимальные затраты и выполняется план по производству продукции при заданных ресурсах.

Введем обозначения:

k — вид производимой продукции;
P_k — заданный план по производству каждого вида продукции;
l — число видов производимой продукции;
s — вид выделяемых ресурсов;
m — число видов выделяемых ресурсов;
b_s — количество выделяемых ресурсов;
j — вид технологии;
n — число видов технологий;
c_j— затраты при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью;
a_{jk} — количество производимой продукции каждого вида при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью;
b_{sj} — количество потребляемых ресурсов s-го вида при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью;
x_j — интенсивность использования j-й технологии.

Математическая модель. Найти такие интенсивности технологий x_j, при которых достигается минимум затрат

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

выполняется план производства

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geqslant P_k \quad (n = 1, 2, \ldots, l),$$

используются выделенные ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} b_{sj} x_j \leqslant b_s \quad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

при неотрицательности интенсивностей

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Это задача линейного программирования.

Обозначения, дополнительные к модели оптимального выбора технологий: u_s — оценка s-го ресурса, v_k — оценка k-й продукции.

Математическая модель. Найти такие оценки u_s и v_k, при которых достигается максимум целевой функции

$$\sum_{k=1}^{l} P_k v_k - \sum_{s=1}^{m} b_s u_s \to \max$$

и выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{l} a_{kj} v_k - \sum_{s=1}^{m} b_{sj} u_s \leqslant c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$v_k \geqslant 0; \quad u_s \geqslant 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots, m).$$

Дифференциальные затраты получаются из двойственной задачи выбора технологии при условии, что при каждой технологии производится только один продукт

$$v_k = c_k + \sum_{s=1}^{m} b_{sj} u_s \quad (k = 1, 2, \ldots, l).$$

Двойственные (объективно обусловленные) оценки

$$v_{k_0} = \frac{1}{a_{k_0 j}} \left[\left(c_j + \sum_{s=1}^{m} b_{sj} u_s \right) - \sum_{k \neq k_0} a_{kj} v_k \right].$$

Дифференциальные затраты и двойственные оценки показывают оценку продукции с учетом дефицитности ресурсов.

Пример 15. В отрасли можно производить два вида ($l = 2$) продукции ($k = 1, 2$), с помощью $n = 2$ технологий ($j = 1, 2$) выделяются ресурсы $m = 3$ видов ($s = 1, 2, 3$). План по производству продукции: $P_1 = 200$ ед., $P_2 = 660$ ед.

Объем выделяемых ресурсов: $b_1 = 97$ ед., $b_2 = 54$ ед., $b_3 = 100$ ед.

Остальные технико-экономические показатели приведены в табл. 17.

17. Технико-экономические показатели

Номер технологии	Нормы потребления ресурсов			Нормы выхода продукции		Затраты c_j, млн. руб.
	$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$k = 1$	$k = 2$	
$j = 1$	2,5	1,5	1,5	5	30	7
$j = 2$	1,5	0,4	4	4	6	8

Считая x_1 и x_2 соответственно интенсивностями использования 1-й и 2-й технологий, модель запишется в виде

$$C = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 7x_1 + 8x_2 \to \min;$$

$$5x_1 + 4x_2 \geqslant 200; \quad 30x_1 + 6x_2 \geqslant 660;$$

$$2{,}5x_1 + 1{,}5x_2 \leqslant 97; \ 1{,}5x_1 + 0{,}4x_2 \leqslant 54; \ 1{,}5x_1 + 4x_2 \leqslant 100;$$

$$x_1 \geqslant 0; \quad x_2 \geqslant 0.$$

Решая задачу, получаем: $x_1 = 34$, $x_2 = 7{,}5$, $C = 298$.
Производство продукции 1-го вида будет 200 ед., 2-го — 1065 ед.
Использование ресурсов 1-го вида 96,3 ед., 2-го — 54 ед., 3-го — 81 ед.; ресурсы 1-го и 3-го видов недоиспользуются.

Двойственная задача выбора технологий

$$F = 200v_1 + 660v_2 - 97u_1 - 54u_2 - 100u_3 \to \max;$$
$$5v_1 + 30v_2 - 2{,}5u_1 - 1{,}5u_2 - 1{,}5u_3 \leqslant 7;$$
$$4v_1 + 6v_2 - 1{,}5u_1 - 0{,}4u_2 - 4u_3 \leqslant 8;$$
$$v_1 \geqslant 0,\ v_2 \geqslant 0,\ u_1 \geqslant 0;\ u_2 \geqslant 0;\ u_3 \geqslant 0.$$

Решая задачу, получаем: $v_1 = 2{,}3$, $v_2 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 0$.

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ТЕХНОЛОГИЙ

Имеются несколько предприятий, на которых применяются различные технологии, причем нормы потребления ресурсов и эффективность выпуска продукции зависят от предприятия. Заданы общий объем потребления ресурсов по всем предприятиям и выпуск продукции по каждому предприятию. Необходимо определить оптимальный выбор технологий на каждом предприятии, чтобы при этом общая эффективность (прибыль) была максимальной.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
q — число всех предприятий;
k — вид выпускаемой продукции;
l — число всех видов выпускаемой продукции;
s — вид выделяемых ресурсов;
m — число всех видов выделяемых ресурсов;
j — вид технологии;
n — число всех видов технологии;
b_s — количество выделяемых ресурсов s-го вида для производства продукции на всех предприятиях;
P_{ik} — объем выпускаемой продукции k-го вида на i-м предприятии;
a_{ij} — прибыль, получаемая на i-м предприятии при применении j-й технологии с единичной интенсивностью;
a_{ijk} — объем выпускаемой продукции k-го вида при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью на i-м предприятии;
b_{ijs} — норма потребления s-го вида ресурса при использовании j-й технологии с единичной интенсивностью на i-м предприятии;
x_{ij} — интенсивность использования j-й технологии на i-м предприятии.

Математическая модель:

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \to \max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} \geqslant P_{ik};$$
$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} b_{ijs}x_{ij} \leqslant b_s;$$
$$x_{ij} \geqslant 0.$$

Это задача линейного программирования блочного вида. Для ее решения можно применять как универсальный симплекс-метод, так и специальные методы блочного программирования.

Определить оптимальный план производства продукции отрасли по номенклатуре, исходя из выделенных ресурсов.

Введем обозначения:

k — вид производимой продукции;
l — число всех видов продукции;
R_k — прибыль от реализации единицы продукции k-го вида;
s — вид выделяемых ресурсов;
m — число всех видов выделяемых ресурсов;
b_{sk} — норма потребления s-го вида ресурсов при производстве единицы k-го вида продукции;
b_s — объем выделяемых ресурсов s-го вида;
h_k, g_k — нижняя и верхняя границы для производства продукции k-го вида.

Математическая модель. Найти такие объемы производства x_k, при которых достигается максимум прибыли

$$\sum_{k=1}^{l} R_k x_k \to \max$$

и выполняются условия: по используемым ресурсам

$$\sum_{k=1}^{l} b_{sk} x_k \leqslant b_s \quad (s = 1, 2, \dots, m),$$

по производству продукции

$$h_k \leqslant x_k \leqslant g_k \quad (k = 1, 2, \dots, l).$$

Это задача линейного программирования.

Пример 16. В отрасли промышленности производится $l = 2$ вида продукции ($k = 1, 2$) и выделяется $m = 4$ вида ресурсов ($s = 1, 2, 3, 4$). Технико-экономические показатели производства продукции приведены в табл. 18.

18. Технико-экономические показатели плана отрасли

Вид продукции k	R_k, млн. руб.	h_k	g_k	Норма потребления ресурсов b_{sk}, ед.			
				$s = 1$	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$
1	4	10	20	1	1,5	0,5	2
2	2	15	20	2	1	1,5	0,5

Объем выделенных ресурсов: $b_1 = 55$ ед., $b_2 = 40$ ед., $b_3 = 35$ ед., $b_4 = 60$ ед. Математическая модель: $4x_1 + 2x_2 \to \max$; $x_1 + 2x_2 \leqslant 55$; $1{,}5x_1 + x_2 \leqslant 40$; $0{,}5x_1 + 1{,}5x_2 \leqslant 35$; $2x_1 + 0{,}5x_2 \leqslant 60$; $10 \leqslant x_1 \leqslant 20$; $15 \leqslant x_2 \leqslant 20$.
Решая задачу, получаем: $x_1 = 14{,}3$, $x_2 = 18{,}5$ ед., прибыль $R = 94{,}2$ млн. руб.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЩЕГО ПЛАНА ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ ПО ПРЕДПРИЯТИЯМ МИНИСТЕРСТВА

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
k — вид продукции;
l — число всех видов продукции;
a_k — план по выпуску продукции k-го вида;
s — вид ресурса;
m — число всех видов ресурсов;
b_{si} — число s-го вида ресурса, выделяемого i-му предприятию;
R_{ki} — прибыль от реализации k-го вида продукции, полученной на i-м предприятии;
x_{ki} — объем выпуска k-й продукции на i-м предприятии;
b_{ski} — норма потребления s-го вида ресурсов на i-м предприятии при выпуске единицы продукции k-го вида;
h_{ki}, g_{ki} — нижняя и верхняя границы по производству k-го вида продукции на i-м предприятии.

Математическая модель состоит в нахождении таких x_{ki}, при которых достигается максимум прибыли

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} R_{ki}x_{ki} \to \max$$

и выполняются условия: по выпуску продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ki} = a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

по используемым ресурсам

$$\sum_{k=1}^{l} b_{ski}x_{ki} \leqslant b_{si} \quad (s = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, n);$$

по объему выпускаемой продукции на каждом предприятии

$$h_{ki} \leqslant x_{ki} \leqslant g_{ki} \quad (k = 1, 2, \ldots, l;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Такая модель представлена в виде распределительной задачи, для решения которой имеются специальные методы.

19. Технико-экономические показатели 1-го завода

Вид продукции k	Норма потребления ресурсов		Границы производства продукции (тыс. т)		Прибыль от выпуска продукции
	$s = 1$	$s = 2$	h_{k1}	g_{k1}	R_{k1}
1	2,0	0,5	20	80	35
2	4,0	5,0	0	50	50
3	3,0	2,0	20	160	40

20. Технико-экономические показатели 2-го завода

Вид продукции k	Норма потребления ресурсов b_{sk2}		Границы производства продукции (тыс. т)		Прибыль от выпуска продукции
	$s=1$	$s=2$	h_{k2}	g_{k2}	R_{k2}
1	1,5	0,8	0	50	30
2	4,5	4,0	20	200	55
3	3,2	2,5	0	50	36

Пример 17. Для отрасли промышленности задан план по производству $a_1 = 100$, $a_2 = 200$, $a_3 = 150$ тыс. т. Выпуск этой продукции надо распределить по двум заводам ($i = 1, 2$). Технико-экономические показатели этих заводов даны в табл. 19 и 20. Лимиты ресурсов для 1-го завода: $b_{11} = 570$ тыс. т., $b_{21} = 330$ тыс. т.; для 2-го завода: $b_{12} = 960$ тыс. т, $b_{22} = 840$ тыс. т.

Математическая модель:

$$P = 35x_{11} + 50x_{21} + 40x_{31} + 30x_{21} + 55x_{22} + 36x_{32} \to \max;$$
$$x_{11} + x_{12} = 100;\; x_{21} + x_{22} = 200;\; x_{31} + x_{32} = 150;$$
$$2x_{11} + 4x_{21} + 3x_{31} \leqslant 570;\quad 0{,}5x_{11} + 5x_{21} + 2x_{31} \leqslant 330;$$
$$1{,}5x_{12} + 4{,}5x_{22} + 3{,}2x_{32} \leqslant 960;\; 0{,}8x_{12} + 4x_{22} + 2{,}5x_{32} \leqslant 840;$$
$$20 \leqslant x_{11} \leqslant 80;\quad 0 \leqslant x_{21} \leqslant 50;\; 20 \leqslant x_{31} \leqslant 160;$$
$$0 \leqslant x_{12} \leqslant 50;\; 20 \leqslant x_{22} \leqslant 200;\; 0 \leqslant x_{32} \leqslant 50.$$

Решение этой задачи: $x_{11} = 60$, $x_{12} = 40$, $x_{21} = 0$, $x_{22} = 200$, $x_{31} = 150$, $x_{32} = \theta$, $P = 20\,300$ тыс. руб.

МОДЕЛЬ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ПРОИЗВОДСТВА НА ПРЕДПРИЯТИЯХ МИНИСТЕРСТВА

Определить план производства продукции на каждом предприятии министерства с максимальной прибылью при заданном плане производства продукции на каждом предприятии и выделенных ресурсах в целом для всех предприятий.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
s — вид ресурса;
m — число всех видов ресурсов;
b_s — количество выделенных ресурсов s-го вида для всех предприятий;
b_{sik} — норма потребления s-го вида ресурса на i-м предприятии при производстве единицы k-го вида продукции;
a_k — план по производству продукции k-го вида на всех предприятиях вместе;
P_{ik} — минимально допустимый план по производству продукции k-го вида на i-м предприятии;
R_{ik} — прибыль на i-м предприятии при производстве единицы продукции k-го вида;
x_{ik} — план производства k-й продукции на i-м предприятии.

Математическая модель задачи состоит в нахождении таких интенсивностей технологий x_{ik}, при которых достигается максимальная прибыль

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} R_{ik} x_{ik} \rightarrow \max$$

и выполняются условия: по используемым ресурсам

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l_i} b_{sik} x_{ik} < b_s \quad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

по выпуску продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} \geqslant a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, l);$$

$$x_{ik} \geqslant P_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, l).$$

Сформулированная модель является задачей линейного программирования блочного типа, для ее решения необходимо использовать специальные методы.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕКУЩЕГО ПЛАНИРОВАНИЯ В ОТРАСЛИ С УЧЕТОМ ПОСТУПЛЕНИЯ, ХРАНЕНИЯ И ПЕРЕРАБОТКИ СЫРЬЯ

Введем обозначения:

t — номер периода времени (года) ($t = 1, 2, \ldots, \tau, \ldots, T$);
T — число периодов времени (лет);
i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
s — вид сырья;
m — число всех видов сырья;
k — вид продукции;
l — число всех видов продукции;
E_k — ассортиментный коэффициент производства продукции k-го вида по отрасли в целом (показывает объем производимой продукции k-го вида в расчете на единицу продукции 1-го вида ($E_1 = 1$));
b_{ski} — удельный расход s-го вида сырья на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии;
M_s — максимально допустимый срок хранения s-го вида сырья;
C_{ki} — удельные затраты на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии за вычетом стоимости сырья и затрат на хранение;
C_{si} — удельные затраты по хранению s-го вида сырья на i-м предприятий;
P_k — цена единицы готовой продукции k-го вида;
P_s — цена единицы сырья s-го вида;
a_{ti} — вместимость склада i-го предприятия в t-й период;
a_{tki} — мощность предприятия i-го вида по выпуску продукции k-го вида в t-й период;
b_{ts} — общеотраслевые лимиты на s-й вид сырья в t-й период;
x_{tki} — объем производства k-го вида продукции на i-м предприятии в t-й период;
x_{tsi} — количество сырья s-го вида, которое должно поступить на склад i-го предприятия в t-й период.

Математическая модель:

$$F=\sum_{t=1}^{T}\Big\{\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}P_k x_{tki}-\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}C_{ki}x_{tki}-$$

$$-\sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}C_{si}\Big[\sum_{\tau=1}^{t}x_{\tau si}-\sum_{\tau=1}^{t-1}\sum_{k=1}^{l}b_{ski}x_{\tau ki}\Big]-\sum\sum P_s x_{tsi}\Big\}\to\max.$$

Ограничения: по мощности $x_{tki}\leqslant a_{tki}$

$$(t=1,\ 2,\ \ldots,\ T;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

по количеству поступающего сырья

$$\sum_{k=1}^{l}b_{ski}x_{tki}-\sum_{\tau=[t-M_s+1]}^{t}x_{\tau si}+\sum_{\tau=[t-M_s+1]}^{t-1}\sum_{k=1}^{l}b_{ski}x_{\tau ki}\leqslant 0$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad t=1,\ 2,\ \ldots,\ T),$$

по лимитам ресурсов

$$\sum_{i=1}^{n}x_{tsi}\leqslant b_{ts}\quad (t=1,\ 2,\ \ldots,\ T;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

по вместимости складов

$$\sum_{s=1}^{m}\Big[\sum_{\tau=[t-M_s+1]}^{t}x_{\tau si}-\sum_{\tau=[t-M_s+1]}^{t}\sum_{k=1}^{l}b_{ski}x_{\tau ki}\Big]\leqslant a_{ti},$$

по ассортименту выпускаемой продукции

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}[E_1 x_{tki}-E_k x_{t1i}]=0$$

при неотрицательности переменных

$$x_{tki}\geqslant 0;\quad x_{tsi}\geqslant 0\quad (t=1,\ 2,\ \ldots,\ T;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Это задача линейного программирования, для решения которой можно применить симплекс-метод.

МОДЕЛЬ ЗАГРУЗКИ ПАРКА МАШИН

Модель может использоваться для выбора специализации отрасли бумагоделательных машин, которые можно переналаживать для производства различной бумаги.

Введем обозначения:

k — вид продукции (бумаги);
l — число всех видов продукции;
i — вид машины (бумагоделательной);
n — число видов машин;
a_{ik} — годовой объем производства продукции k-го вида на i-й машине;
a_k — объем производства продукции k-го вида в целом по отрасли;
x_{ik} — часть (доля) годового ресурса времени работы i-й машины для производства k-й продукции;
y — коэффициент перевыполнения производственного задания.

Математическая модель. Найти $y \to \max$
при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_{ik} \geqslant (1+y)\,a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ik} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$y \geqslant 0, \; x_{ik} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, l).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ СПЕЦИАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

Модель можно применить, например, в шелкоткацкой промышленности. Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число предприятий;
k — вид продукции (шелковых тканей);
l — число всех видов продукции;
a_k — суммарная потребность в продукции k-го вида;
s — вид ресурса;
m — число всех видов ресурсов;
b_s — общеотраслевой лимит ресурса s-го вида;
q_i — номер варианта специализации i-го предприятия;
Q_i — число всех видов специализации i-го предприятия;
a_{ikq_i} — объем производства k-й продукции на i-м предприятии согласно q_i-го варианта;
a_{isq_i} — суммарные затраты s-го ресурса на i-м предприятии согласно q_i-го варианта;
C_{iq_i} — суммарные затраты на производство всей продукции на i-м предприятии согласно q_i-го варианта;
x_{iq_i} — интенсивность использования q_i-го варианта специализации на i-м предприятии.

Математическая модель:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_i=1}^{Q_i} C_{iq_i} x_{iq_i} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_i=1}^{Q_i} a_{isq_i} x_{iq_i} \leqslant b_s \quad (s = 1, 2, \ldots, m);$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q_i=1}^{Q_i} a_{ikq_i} x_{iq_i} \geqslant a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{q_i=1}^{Q_i} x_{iq_i} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$x_{iq_i} = \begin{cases} 1, & \text{если принят вариант } q_i \\ 0, & \text{если не принят вариант } q_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ГРАФИКА УБОРКИ, ХРАНЕНИЯ И ПЕРЕРАБОТКИ САХАРНОЙ СВЕКЛЫ

Введем обозначения:

t — номер пятидневки (периода года), в течение которой возможно осуществлять переработку свеклы (начало переработки совпадает с началом уборки);
T — число всех пятидневок, в течение которых должна завершиться уборочная кампания;
u — число всех пятидневок, в течение которых должна завершиться переработка свеклы;
a_t — доля сахара в свекле в t-ю пятидневку;
d_t — урожайность свеклы в t-ю пятидневку;
C_t — доля потерь сахара при переработке единицы веса свеклы в t-ю пятидневку;
b_t — доля потерь сахара при хранении единицы веса свеклы в t-ю пятидневку;
s — площадь, занятая под свеклу;
R_t — максимальные возможности заводов по переработке свеклы в t-ю пятидневку;
N_t — максимальные возможности транспорта по перевозке свеклы в t-ю пятидневку;
q — доля потерь веса корня свеклы за счет внутризаводской технологии за пятидневку;
x_t — убираемая площадь за t-ю пятидневку;
y_t — количество перерабатываемой свеклы за t-ю пятидневку;
z_t — количество свеклы, хранимой в t-ю пятидневку.

Математическая модель:

$$L = \sum_{t=1}^{T} a_t d_t x_t - \sum_{t=1}^{u} (C_t y_t - b_t z_t) \to \max$$

при ограничениях

$$\sum_{t=1}^{T} x_t < s;$$

$$d_1 x_1 = y_1 + z_1;$$

$$d_t x_t + (1 - q) z_{t-1} = y_t + z_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T);$$

$$(1 - q) z_{t-1} = y_t + z_t \quad (t = T + 1, \ldots, u);$$

$$d_t x_t \leqslant N_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T);$$

$$y_t \leqslant R_t \quad (t = 1, 2, \ldots, u);$$

$$x_t \geqslant 0, \quad y_t \geqslant 0, \quad z_t > 0 \quad (t = 1, 2, \ldots, u).$$

МОДЕЛЬ СПЕЦИАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА СТАНДАРТНОГО И НОРМАЛИЗОВАННОГО ИНСТРУМЕНТА

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер технологии;
r — число всех видов технологий;
s — номер группы оборудования;
m — число всех групп оборудования;

k — номер типоразмера выпускаемого инструмента;
l — число всех типоразмеров выпускаемого инструмента;
a_k — общая программа производства инструмента k-го типоразмера;
b_{sij} — фонд времени s-й группы оборудования, закрепленного за соответствующей деталеоперацией и работающего по j-й технологии на i-м предприятии;
a_{skij} — время выполнения деталеопераций на s-м оборудовании при изготовлении инструмента k-го типоразмера на i-м предприятии по j-й технологии;
C_{kij} — себестоимость изготовления единицы инструмента k-го типоразмера на i-м предприятии по j-й технологии;
x_{kij} — количество инструмента k-го типоразмера, изготовляемого на i-м предприятии по j-й технологии.

Математическая модель:

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} C_{kij} x_{kij} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{l} a_{skij} x_{kij} \leqslant b_{sij} \quad (s = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, r);$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} x_{kij} \geqslant a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, l);$$

$$x_{kij} \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, l; \; i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, r).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ СПЕЦИАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА СТАНДАРТНОГО И НОРМАЛИЗОВАННОГО ИНСТРУМЕНТА С УЧЕТОМ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ ВЕДУЩИХ ГРУПП ОБОРУДОВАНИЯ

Введем обозначения:

s_0 — номер ведущей группы оборудования типоразмеров инструмента;
m_0 — число всех видов ведущих групп оборудования;
i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер технологии;
r — число всех видов технологий;
k — номер вида типоразмера выпускаемого инструмента;
l — число всех видов типоразмеров инструментов;
a_k — общий план производства инструментов k-го типоразмера;
b_{s_0ij} — распределяемый фонд времени работы ведущей группы оборудования s_0 по j-й технологии на i-м предприятии;
a_{s_0kij} — время выполнения деталеопераций по обработке инструмента k-го типоразмера ведущей группой оборудования по j-й технологии на i-м предприятии;
C_{s_0kij} — заводская себестоимость изготовления инструмента k-го типоразмера на s_0-й ведущей группе оборудования по j-й технологии на i-м предприятии;

d_{s_0klj} — трудоемкость изготовления инструмента k-го типоразмера на s-й ведущей группе оборудования по j-й технологии на l-м предприятии;

x_{s_0klj} — количество изготовляемого инструмента k-го типоразмера на s_0-й ведущей группе оборудования по j-й технологии на l-м предприятии.

В математической модели в качестве критерия можно выбрать минимум себестоимости производства

$$C = \sum_{k=1}^{l} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{s_0=1}^{m_0} C_{s_0klj} x_{s_0klj} \to \min,$$

минимум трудоемкости производства

$$D = \sum_{k=1}^{l} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{s_0=1}^{m_0} d_{s_0klj} x_{s_0klj} \to \min$$

или минимум затрат станочного времени

$$A = \sum_{k=1}^{l} \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{s_0=1}^{m_0} d_{s_0klj} x_{s_0klj} \to \min$$

при ограничениях: на пропускные способности

$$\sum_{k=1}^{l} x_{s_0klj} < b_{s_0lj} \quad (s_0 = 1, 2, \ldots, m; \ \ l = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, r),$$

на выпуск инструментов

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \sum_{s_0=1}^{m_0} x_{s_0klj} = a_k$$

и на неотрицательность переменных

$$x_{s_0klj} \geqslant 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, m_0; \ \ k = 1, 2, \ldots, l; \ \ l = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, r).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛИ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ОТРАСЛИ

В определенный плановый период необходимо произвести продукцию отрасли и отправить ее предприятиям в запланированном объеме. Намечены места, где можно произвести реконструкцию или расширение действующих предприятий или осуществить новое строительство для производства продукции отрасли. Необходимо определить размеры мощностей этих предприятий и объем перевозок произведенной продукции к потребителям так, чтобы были минимальные затраты.

ЛИНЕЙНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ОДНОГО ПРОДУКТА

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;

j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
Q_i — затраты на производство единицы продукции на i-м предприятии;
A_j — объем поставки продукции j-му потребителю;
N_i — максимально возможная мощность i-го предприятия-поставщика;
C_{ij} — стоимость доставки единицы продукции от i-го предприятия j-му потребителю;
x_i — объем производства продукции (мощность) i-го предприятия;
x_{ij} — объем перевозки продукции от i-го предприятия j-му потребителю.

Математическая модель. Найти минимум общих затрат на производство и транспортировку продукции

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях на производство продукции

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} < N_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и потребление продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_i \geqslant 0; \quad x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m).$$

В этой задаче Q_i может означать себестоимость C_i производства единицы продукции или приведенные затраты

$$Q_i = C_i + EK_i,$$

где E — нормативный коэффициент капитальных вложений в отрасли; K_i — удельные капитальные вложения на расширение, реконструкцию или новое строительство i-го предприятия.

Построенную модель можно свести к транспортной задаче, обозначив $Q_i + C_{ij} = B_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$.

Тогда целевая функция задачи размещения становится такой же, как и в транспортной задаче: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} B_{ij} x_{ij} \to \min$, а ограничения такие же, как и в транспортной задаче.

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ

В этой задаче учитывается изменение затрат на производство единицы продукции в зависимости от мощности предприятия.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер потребителя продукции;
m — число всех потребителей;
A_j — объем поставки продукции j-му потребителю;
N_i — максимально возможная мощность i-го предприятия-поставщика;

C_{ij} — стоимость доставки единицы продукции от i-го предприятия j-му потребителю;

x_i — объем производства продукции (мощность) i-го предприятия;

x_{ij} — объем перевозки продукции от i-го предприятия к j-му потребителю;

$Q_i = f_i(x_i)$ — затраты на производство единицы продукции на i-м предприятии.

Математическая модель. Найти минимум затрат

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} < N_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

на поставки продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = A_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и неотрицательность переменных

$$x_i > 0; \quad x_{ij} > 0; \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Для решения этой задачи имеются специальные методы.

СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ И ЛИМИТИРУЮЩИХ РЕСУРСОВ

Следует так разместить предприятия по производству продукции, чтобы при минимальных затратах на производство и транспортировку продукции были учтены потребности на местах, лимитирующие ресурсы на производство продукции и пропускные способности транспортной сети.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;

n — число всех предприятий;

j — номер потребителя;

m — число всех потребителей;

s — вид лимитирующего ресурса;

A_j — объем поставки продукции j-му потребителю;

N_i — максимально возможная мощность i-го предприятия;

Q_i — затраты на производство единицы продукции на i-м предприятии;

b_s — объем лимитирующего ресурса s-го вида;

b_{is} — норма потребления s-го вида ресурса на производство единицы продукции на i-м предприятии;

d_{ij} — максимально возможная пропускная способность участка транспортной сети от i-го предприятия к j-му потребителю;

C_{ij} — стоимость перевозки единицы продукции от i-го предприятия к j-му потребителю;

x_i — объем производства продукции на i-м предприятии;
x_{ij} — объем перевозок продукции от i-го предприятия к j-му потребителю.

Математическая модель. Найти минимум затрат

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} < N_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

на поставки продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

на лимитирующие ресурсы

$$\sum_{i=1}^{n} b_{is} x_{ij} < b_s,$$

на пропускные способности сети

$$0 < x_{ij} < d_{ij}.$$

Если Q_i не зависит от x_i, то полученная модель является задачей линейного программирования. Если Q_i нелинейно зависит от x_i, то полученную модель можно решить методами нелинейного программирования.

МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

На транспортной сети отмечены пункты производства и пункты потребления продукции; сеть представлена в виде графа, состоящего из множества вершин и дуг; известна потребность продукции в каждой вершине графа и мощность действующих предприятий, которые не предполагается закрывать. Требуется определить мощность закрывающихся предприятий и транспортные потоки продукции с минимальными общими затратами.

Введем обозначения:

i, j — вершины графа, т. е. пункты производства и потребления продукции;
ij — дуга графа (часть транспортной сети, по которой перевозится продукция из пункта i в пункт j);
Q_i — затраты на производство единицы продукции в i-м пункте;
C_{ij} — затраты на перевозку единицы продукции по дуге ij;
N_i — максимальный возможный объем производства продукции в i-м пункте;
A_j — объем потребления продукции в i-м пункте;
M — множество всех дуг графа;
x_{ij} — объем перевозок из i-й вершины в j-ю;
A — множество вершин, из которых продукцию отправляют;
B — множество вершин, из которых продукцию получают;
D — множество промежуточных пунктов.

Математическая модель. Найти минимум затрат

$$\sum_{i,\ j \in M} (Q_i + C_{ij})\, x_{ij} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_k x_{ik} - \sum_l x_{li} < N_i \quad (i \in A);$$

$$\sum_l x_{lj} - \sum_k x_{jk} = A_j \quad (j \in B);$$

$$\sum_k x_{ik} - \sum_l x_{li} = 0 \quad (i \in D).$$

Суммирование по k означает вывоз продукции из пункта i по всем возможным направлениям k, суммирование по l — ввоз продукции в пункт i из всех возможных направлений l транспортной сети.

ВАРИАНТНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ

Необходимо определить оптимальную мощность размещаемых предприятий с учетом дискретного изменения вариантов мощностей.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
q — номер варианта развития предприятия, производящего продукцию;
u_i — число всех вариантов развития i-го предприятия, производящего продукцию;
N_{iq} — мощность i-го предприятия, производящего продукцию согласно q-го варианта;
A_j — объем поставки продукции j-му потребителю;
Q_{iq} — затраты на единицу продукции на i-м предприятии согласно q-му варианту развития;
C_{ij} — стоимость перевозки единицы продукции из i-го предприятия j-му потребителю;
x_{iq} — переменная величина, равная 1, если на i-м предприятии выбирается q-й вариант развития производства, и равная 0, если на i-м предприятии не выбирается q-й вариант развития;
x_{ij} — объем перевозок продукции от i-го предприятия к j-му потребителю.

Математическая модель. Найти минимум затрат

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{u_i} Q_{iq} x_{iq} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant \sum_{q=1}^{u_i} N_{iq} x_{iq} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

на потребление продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

на выбор варианта

$$\sum_{q=1}^{u_i} x_{iq} \leqslant 1,$$

на неотрицательность переменных

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Полученная модель является задачей смешанного типа, для решения которой предложены специальные методы.

МОДЕЛЬ ВАРИАНТНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Имеется транспортная сеть с расположенными на ней пунктами производства (как действующими, так и проектируемыми) и потребления, которые вместе с транспортными узлами представляют собой вершины сети (графа).

Введем обозначения:

i, j — вершины графа;
q — номер варианта развития предприятия, производящего продукцию;
i, j — дуга графа;
A_j — потребность в продукции в каждой из вершин графа;
B_i — мощность i-го действующего предприятия, производящего продукцию, которое не предполагается закрывать;
M_{iq} — мощность i-го предприятия, которое может развиваться согласно q-му варианту;
Q_{iq} — удельные затраты на производство единицы продукции на i-м предприятии, развивающиеся согласно q-му варианту;
C_{ij} — затраты на перевозку единицы продукции из i-го пункта в j-й пункт потребления;
C_j — затраты, связанные с потреблением единицы продукции в j-м пункте;
V — множество вершин графа;
U — множество дуг графа;
x_i — объем производства продукции в i-м пункте;
x_{ij} — объем перевозок по дуге ij;
y_j — потребление продукции в j-й вершине;
z_{iq} — переменная величина, равная 1, если в i-м пункте принят q-й вариант развития производства, и равная 0, если в i-м пункте не принят q-й вариант развития.

Математическая модель. Найти минимум затрат на производство, перевозку и потребление продукции

$$F = \sum_{i,\ q} Q_{iq} M_{iq} z_{iq} + \sum_{i,\ j \in u} C_{ij} x_{ij} + \sum_{j} C_j y_j \to \min$$

при ограничениях: по соответствию объемов производства типовым мощностям

$$x_i = \sum_{q} M_{iq} z_{iq},$$

по выбору единого варианта на каждом развивающемся предприятии

$$\sum_q z_{iq} \leqslant 1,$$

по балансу производства, получения вывоза и потребления продукции в каждом пункте

$$B_i + x_i + \sum_{i,\, j \in U} x_{ij} - \sum_{i,\, j \in U} x_{ij} - y_i \geqslant 0 \quad (i \in V),$$

по удовлетворению потребностей продукции каждого потребителя $y_j = A_j$ и неотрицательности переменных $x_i \geqslant 0$; $x_{ij} \geqslant 0$; $y_j \geqslant 0$.

МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКИХ МНОГОЭТАПНЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Производство продукции осуществляется в несколько этапов — добыча сырья, переработка на нескольких предприятиях и затем потребление. Необходимо получить оптимальный план производства от добычи сырья до потребления продукции.

Модели могут быть безвариантные (линейные и нелинейные) и вариантные.

Для построения безвариантной линейной модели введем обозначения:

t — номер этапа;
T — число всех этапов;
n_t — число предприятий на t-м этапе;
j — номер потребителя;
u — номер предприятия на промежуточном этапе, включая 1-й этап;
a_t^u — максимально возможные объемы производства на u-м предприятии t-го этапа ($t = 1, 2, \ldots, T$; $u = 1, 2, \ldots, n_t$);
A_l — объем потребления продукции на последнем этапе;
C_t^u — затраты на переработку единицы продукции в u-м предприятии t-го этапа;
C_t^{uk} — затраты на перевозку единицы продукции из u-го предприятия t-го этапа в k-е предприятие $(t + 1)$-го этапа;
x_t^{uk} — искомый объем перевозки продукции из u-го предприятия t-го этапа в k-е предприятие $(t + 1)$-го этапа.

Каждое k-е предприятие последующего этапа является потребителем сырья или полуфабрикатов, производимых на предприятиях предыдущего этапа. Поэтому предприятия попеременно выступают как поставщики и потребители продукции. Это значит, что величины a_t^u, A_j, x_t^{uk} представлены в однородных единицах измерения с помощью пересчетов на единый условный продукт.

Математическая модель состоит из целевой функции, выражающей общие затраты на производство и перевозки продукции на всех этапах

$$\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{u=1}^{n_t} \sum_{k=1}^{n_{t+1}} C_t^u x_t^{uk} + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{u=1}^{n_t} \sum_{k=1}^{n_t+1} \bar{C}_t^{uk} x_t^{uk} \to \min$$

при условиях: объем вывоза не должен превышать установленного размера

$$\sum_{k=1}^{n_t+1} x_t^{uk} \leqslant a_t^u \quad (t = 1, \ldots, T-1;\ u = 1, 2, \ldots, n_t),$$

объем поставок не должен превышать возможностей переработки

$$\sum_{u=1}^{n_t} x_t^{uk} \leqslant a_{t+1}^k \quad (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ k = 1, 2, \ldots, n_{t+1}),$$

на каждом предприятии ввоз должен быть равен вывозу

$$\sum_{u=1}^{n_t} x_t^{uk} = \sum_{u=1}^{n_t+1} x_{t+1}^{ku} \quad (k = 1, 2, \ldots, n_{t+1};\ t = 1, 2, \ldots, T-1),$$

потребность в готовой продукции для каждого потребителя должна удовлетворяться

$$\sum_{u=1}^{n_{T-1}} x_{T-1}^{uj} = A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n_t),$$

поставки должны быть неотрицательными

$$x_t^{uk} \geqslant 0 \quad (t = 1, 2, \ldots, T;\ u = 1, 2, \ldots, n_t;\ k = 1, 2, \ldots, n_{t+1}).$$

Для выполнения совместности условий задачи необходимо, чтобы были справедливы неравенства

$$\sum_{u=1}^{n_t} a_t^u \geqslant \sum_{u=1}^{n_{t+1}} a_{t+1}^u \geqslant \sum_{j=1}^{n_T} A_j.$$

Полученная модель является задачей линейного программирования транспортного типа. В результате решения этой задачи получим оптимальные объемы перевозок x_t^{uk} ($t = 1, 2, \ldots, T$; $u = 1, 2, \ldots, n_t$; $k = 1, 2, \ldots, n_{t+1}$) между предприятиями различных этапов. Объем производимой продукции на каждом u-м предприятии равен

$$\sum_{k=1}^{n_{t+1}} x_t^{uk} \quad (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ u = 1, 2, \ldots, n_t).$$

Объем потребляемой продукции на k-м предприятии

$$\sum_{u=1}^{n_t} x_t^{uk} \quad (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ k = 1, 2, \ldots, n_{t+1}).$$

Пример 18. Заготовка сырья (1-й этап) осуществляется в трех местах ($n_1 = 3$), переработка сырья (2-й этап) производится на пяти предприятиях ($n_2 = 5$), на 3-м этапе имеется восемь потребителей ($n_3 = 8$). Данные о стоимости перевозок из пунктов 1-го этапа к предприятиям 2-го этапа приведены

21. Показатели стоимости перевозок из 1-го во 2-й этап

Поставщики	Потребители					
	1	2	3	4	5	a_1^u
1	13,5	12,0	16,1	14,4	15,5	10
2	12,3	13,8	14,1	14,1	14,0	50
3	16,0	—	12,1	13,9	13,1	30

22. Показатели стоимости перевозок из 2-го в 3-й этап

Поставщики	Потребители							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,15	1,0	1,63	1,36	0,74	0,16	2,81	3,84
2	0,77	1,75	2,22	3,00	1,33	0,75	3,58	4,46
3	—	0,75	—	2,33	2,00	2,42	2,51	3,56
4	—	—	—	1,62	—	—	0,23	1,68
5	—	—	—	2,57	—	—	4,1	0,1

в табл. 21. Данные о стоимости перевозок от предприятий 2-го этапа к предприятиям-потребителям приведены в табл. 22. Предельные объемы производства: $a_2^1 = 24$ ед., $a_2^2 = 18$ ед., $a_2^3 = 18$ ед., $a_2^4 = 6$ ед., $a_2^5 = 18$ ед. Потребности: $A_1 = 12$ ед., $A_2 = 14{,}7$ ед., $A_3 = 9{,}8$ ед., $A_4 = 6{,}6$ ед., $A_5 = 2{,}9$ ед., $A_6 = 1{,}5$ ед., $A_7 = 7$ ед., $A_8 = 20$ ед.

Математическая модель:

$$13{,}5x_1^{11} + 12{,}0x_1^{12} + 16{,}1x_1^{13} + 14{,}4x_1^{14} + 15{,}5x_1^{15} + 12{,}3x_1^{2} + 13{,}8x_1^{22} +$$
$$+ 14{,}1x_1^{23} + 14{,}1x_1^{24} + 14{,}0x_1^{25} + 16{,}0x_1^{31} + 12{,}1x_1^{33} + 13{,}9x_1^{34} + 13{,}1x_1^{35} +$$
$$+ 0{,}15x_2^{11} + 1{,}0x_2^{12} + 1{,}63x_2^{13} + 1{,}36x_2^{14} + 0{,}74x_2^{15} + 0{,}16x_2^{16} + 2{,}81x_2^{17} +$$
$$+ 3{,}84x_2^{18} + 0{,}77x_2^{21} + 1{,}75x_2^{22} + 2{,}22x_2^{23} + 3{,}00x_2^{24} + 1{,}33x_2^{25} + 0{,}75x_2^{26} +$$
$$+ 3{,}58x_2^{27} + 4{,}46x_2^{28} + 0{,}75x_2^{32} + 2{,}33x_2^{34} + 2{,}00x_2^{35} + 2{,}42x_2^{36} + 2{,}51x_2^{37} +$$
$$+ 3{,}56x_2^{38} + 1{,}62x_2^{44} + 0{,}23x_2^{47} + 1{,}68x_2^{48} + 2{,}57x_2^{54} + 4{,}1x_2^{57} + 0{,}1x_2^{58} \to \min.$$

Ограничения по этапам:

$$\sum_{k=1}^{5} x_1^{1k} \leqslant 10; \quad \sum_{k=1}^{5} x_1^{2k} \leqslant 50; \quad \sum_{k=1}^{5} x_1^{3k} \leqslant 30;$$
$$\sum_{u=1}^{3} x_1^{u1} \leqslant 24; \quad \sum_{u=1}^{3} x_1^{u2} \leqslant 18; \quad \sum_{u=1}^{3} x_1^{u3} \leqslant 18;$$
$$\sum_{u=1}^{3} x_1^{u4} \leqslant 6; \quad \sum_{u=1}^{3} x_1^{u5} \leqslant 18;$$
$$\sum_{u=1}^{5} x_2^{u1} = 12; \quad \sum_{u=1}^{5} x_2^{u2} = 14{,}7; \quad \sum_{u=1}^{5} x_2^{u3} = 9{,}8;$$
$$\sum_{u=1}^{5} x_2^{u4} = 5{,}6; \quad \sum_{u=1}^{5} x_2^{u5} = 2{,}9; \quad \sum_{u=1}^{5} x_2^{u6} = 1{,}5;$$
$$\sum_{u=1}^{5} x_2^{u7} = 7; \quad \sum_{u=1}^{5} x_2^{u8} = 20.$$

Баланс ввоза и вывоза продукции

$$\sum_{u=1}^{3} x_1^{uk} = \sum_{u=1}^{8} x_2^{ku} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Неотрицательные решения этой задачи следующие: $x_1^{12} = 10$; $x_1^{21} = 24$; $x_1^{24} = 6$; $x_1^{25} = 3{,}5$; $x_1^{33} = 15{,}5$; $x_1^{35} = 14{,}5$; $x_2^{11} = 12$; $x_2^{12} = 2{,}2$; $x_2^{13} = 2{,}7$; $x_2^{14} = 5{,}6$; $x_2^{16} = 1{,}5$; $x_2^{23} = 7{,}1$; $x_2^{25} = 2{,}9$; $x_2^{32} = 12{,}5$; $x_2^{37} = 1$; $x_2^{38} = 2$; $x_2^{47} = 6$; $x_2^{58} = 18$.

Остальные значения объемов перевозок равны нулю. Общие затраты в оптимальном плане составляют 980 ед.

МОДЕЛЬ ВАРИАНТНОЙ МНОГОЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Требуется разместить предприятия с минимальными затратами при многоэтапной переработке сырья с учетом дискретного изменения мощностей.

Введем обозначения:

t — номер этапа;
T — число всех этапов;
n_t — число предприятий на t-м этапе;
j — номер потребителя;
u — номер предприятия на промежуточном этапе;
q — вариант развития предприятия;
Q_u — число вариантов развития на u-м предприятии;
N_{tq}^u — мощность u-го предприятия t-го этапа согласно q-му варианту;
A_j — объем потребления продукции на последнем этапе;
C_{tq}^u — затраты на переработку единицы продукции на u-м предприятии t-го этапа согласно q-му варианту;
C_t^{uk} — затраты на перевозку единицы продукции из u-го предприятия t-го этапа в k-е предприятие $(t+1)$-го этапа;
x_{tq}^u — искомая величина, равная 1, если u-м предприятием t-го этапа выбирается q-й вариант, и равная 0 в противном случае;
x_t^{uk} — искомый объем перевозок из u-го предприятия t-го этапа в k-е предприятие $(t+1)$-го этапа.

Каждое предприятие последующего этапа является потребителем сырья или полуфабрикатов, производимых на предприятиях предыдущего этапа. Это значит, что величины x_{tq}^u, x_t^{uk} представлены в однородных единицах измерения с помощью пересчетов на единый условный продукт.

Математическая модель. Найти минимум затрат на производство и транспортировку сырья, полуфабрикатов и готовой продукции

$$\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{u=1}^{n_t} \sum_{q=1}^{Q_u} C_{tq}^u N_{tq}^u x_{tq}^u + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{u=1}^{n_t} \sum_{k=1}^{n_{t+1}} C_t^{uk} x_t^{uk} \to \min$$

при ограничениях: на возможность выбора только одного варианта развития предприятия

$$\sum_{q=1}^{Q_u} x_{tq}^u \leqslant 1 \quad (u = 1, 2, \ldots, n_t;\ t = 1, 2, \ldots, T-1),$$

на возможные мощности предприятий

$$\sum_{k=1}^{n_{t+1}} x_t^{uk} \leqslant \sum_{q=1}^{Q_u} N_{tq}^u x_{tq}^u \quad (u = 1, 2, \ldots, n_t;\ t = 1, 2, \ldots, T-1),$$

объем поставок не должен превышать возможностей переработки

$$\sum_{u=1}^{n_t} x_t^{uk} \leqslant \sum_{q=1}^{Q_k} N_{t+1,\,q}^k x_{t+1,\,q}^k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_{t+1};\quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T-1),$$

на каждом предприятии ввоз должен быть равен вывозу

$$\sum_{u=1}^{n_t} x_t^{uk} = \sum_{u=1}^{n_{t+1}} x_{t+1}^{ku} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots, n_{t+1};\quad = 1,\ 2,\ \ldots,\ T-1),$$

потребность в готовой продукции на последующем этапе должна быть удовлетворена

$$\sum_{u=1}^{n_{T-1}} x_{T-1}^{uj} = A_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_T),$$

поставки должны быть неотрицательными

$$x_t^{uk} \geqslant 0 \quad (t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T;\quad n = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_t;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_{t+1}).$$

Для выполнения совместности условий задачи необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\sum_{u=1}^{n_t} N_{tq}^u \geqslant \sum_{u=1}^{n_{t+1}} N_{t+1,\,q}^u \geqslant \sum_{j=1}^{n_t} A_j.$$

Решив эту задачу специальными методами, получим: x_{tq}^u, x_t^{uk}.

Объем производимой продукции на u-м предприятии t-го этапа равен

$$\sum_{k=1}^{n_{t+1}} x_t^{uk} \quad (u = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_t;\quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T-1).$$

Объем потребляемой продукции на k-м предприятии $(t+1)$-го этапа равен

$$\sum_{u=1}^{n_t} x_t^{uk} \quad (t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T-1;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_{t+1}).$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Отличие динамических моделей от статических состоит в том, что изменение показателей, коэффициентов, факторов и условий зависит от времени, что выражается с помощью индекса времени.

ЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ

Требуется так разместить производство продукции, чтобы за плановый период затраты были наименьшие и выполнялись условия производства и потребления продукции.

Введем обозначения:

t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
i — номер предприятия;
n — число всех размещаемых предприятий;

j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
a_{it} — максимальная мощность i-го предприятия в t-м году планового периода;
A_{jt} — объем поставок продукции j-му потребителю в t-м году планового периода;
Q_{it} — затраты на производство единицы продукции на i-м предприятии в t-м году;
C_{ijt} — стоимость перевозки единицы продукции из i-го предприятия j-му потребителю в t-м году планового периода;
x_{it} — объем производства продукции на i-м предприятии в t-м году планового периода;
x_{ijt} — объем перевозки продукции из i-го предприятия j-му потребителю в t-м году.

Математическая модель. Найти минимум совокупных затрат

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} Q_{it} x_{it} + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ijt} x_{ijt} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$x_{it} = \sum_{j=1}^{m} x_{ijt} \leqslant a_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; t = 1, 2, \ldots, T),$$

на потребление продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijt} = A_{jt} \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \; t = 1, 2, \ldots, T)$$

при необходимости увеличения плана производства

$$0 \leqslant x_{it} \leqslant x_{it+1} \quad (t = 1, 2, \ldots, T-1).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ВАРИАНТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
q — номер варианта развития предприятия;
u_i — число всех вариантов развития i-го предприятия;
t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
A_{jt} — объем потребления продукции j-м потребителем;
N_{itq} — мощность i-го предприятия в t-м году согласно q-му варианту;
Q_{itq} — затраты на производство продукции на i-м предприятии в t-м году согласно q-го варианта;
C_{ijt} — стоимость перевозки единицы продукции из i-го предприятия в j-е в t-м году;
x_{itq} — равно 1, если на i-м предприятии в t-м году выбирается q-й вариант, и равно 0 в противном случае;
x_{ijt} — объем перевозок из i-го предприятия j-му потребителю в t-м году.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\sum_{q=1}^{u_i} Q_{itq}\, x_{itq} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} C_{ijt}\, x_{ijt} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ijt} \leqslant \sum_{q=1}^{u_i} N_{itq}\, x_{itq} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на потребление продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijt} = A_{jt} \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{ijt} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, T)$$

и при необходимости соблюдения динамики роста производства

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ijt} \leqslant \sum_{j=1}^{m} x_{ijt+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots, T-1).$$

МНОГОПРОДУКТОВЫЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

В многопродуктовых задачах размещения производства рассматриваются проблемы оптимизации мощностей предприятий и транспортных потоков нескольких видов продуктов. На предприятиях может производиться несколько видов продукции, и потребители могут получать несколько видов продукции. Модели многопродуктовых задач размещения являются обобщением аналогичных моделей однопродуктовых задач размещения.

ЛИНЕЙНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МНОГОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
k — номер вида продукции;
l — число всех видов продукции;
N_{ik} — максимально возможный объем производства продукции k-го вида на i-м предприятии;
Q_{ik} — затраты на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии;
A_{jk} — объем потребления продукции k-го вида j-м потребителем;
C_{ijk} — стоимость перевозки единицы продукции k-го вида от i-го предприятия к j-му потребителю;
x_{ik} — объем производства продукции k-го вида на i-м предприятии;
x_{ijk} — объем перевозок продукции k-го вида из i-го предприятия к j-му потребителю.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} Q_{ik} x_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} C_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} x_{ijk} \leqslant N_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, l),$$

на потребление продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = A_{jk} \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, l),$$

не неотрицательность переменных

$$x_{ik} \geqslant 0, \; x_{ijk} \geqslant 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, l).$$

В этой модели Q_{ik} может означать себестоимость производства единицы продукции k-го вида на i-м предприятии или приведенные затраты

$$Q_{ik} = C_{ik} + EK_{ik},$$

где E — нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений, K_{ik} — капитальные вложения на расширение, реконструкцию или новое строительство i-го предприятия.

Эта модель может быть сведена к трехиндексной транспортной задаче путем введения обозначения

$$B_{ijk} = Q_{ik} + C_{ijk}.$$

Тогда целевая функция задачи примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} B_{ijk} x_{ijk} \rightarrow \min,$$

а ограничения остаются прежними.

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МНОГОПРОДУКОВАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

В модели учитывается изменение затрат на производство единицы продукции в зависимости от мощности предприятия.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
k — номер вида продукции;
l — число всех видов продукции;
A_{jk} — объем потребления продукции k-го вида на l-м предприятии;
N_{ik} — максимально возможные мощности i-го предприятия по выпуску k-го вида продукции;
C_{ijk} — стоимость перевозки единицы продукции k-го вида из i-го предприятия j-му потребителю;

x_{ik} — объем производства k-го вида продукции на i-м предприятии;

x_{ijk} — объем перевозок k-го вида продукции из i-го предприятия j-му потребителю;

$Q_{ik} = f_{ik}(x_{ik})$ — затраты на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} x_{ik} f_{ik}(x_{ik}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} C_{ijk} x_{ijk} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} x_{ijk} \leqslant N_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, l),$$

на поставки продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = A_{jk} \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, l),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{ik} \geqslant 0; \; x_{ijk} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, l).$$

СТАТИЧЕСКИЕ МНОГОПРОДУКТОВЫЕ МОДЕЛИ РАЗМЕЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ И ЛИМИТИРУЮЩИХ РЕСУРСОВ

Определить оптимальные мощности и транспортные потоки продуктов при минимальных общих затратах, ограниченных ресурсах и пропускных способностях транспорта.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;

n — число всех предприятий, производящих продукцию;

j — номер потребителя;

m — число всех потребителей;

s — вид ресурса;

k — вид производимой продукции;

l — число всех видов производимой продукции;

A_{jk} — потребность в продукции k-го вида на j-м пункте;

N_{ik} — максимально возможные мощности по производству k-й продукции на i-м предприятии;

Q_{ik} — затраты на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии;

b_s — объем лимитирующего ресурса s-го вида;

b_{isk} — норма потребления s-го вида ресурса на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии;

d_{ijk} — максимально возможная пропускная способность участка транспортной сети от i-го предприятия к j-му потребителю при перевозке k-го вида продукции;

C_{ijk} — стоимость перевозки единицы продукции k-го вида из i-го предприятия к j-му потребителю;

x_{ik} — объем производства продукции k-го вида на i-м предприятии;

x_{ijk} — объем перевозки k-го вида продукции из i-го предприятия j-му потребителю.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} Q_{ik} x_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} C_{ijk} x_{ijk} \to \min$$

при ограничениях: на производимую продукцию

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} x_{ijk} \leqslant N_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, l),$$

на поставки продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = A_{jk} \quad (j = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, l),$$

на лимитирующие ресурсы

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} b_{isk} x_{ik} \leqslant b_s,$$

на пропускные способности

$$0 \leqslant x_{ijk} < d_{ijk}.$$

Если Q_{ik} не зависит от x_{ik}, то модель является задачей линейного программирования. Если Q_{ik} нелинейно зависит от x_{ik}, то получается задача нелинейного программирования.

МОДЕЛЬ МНОГОПРОДУКТОВОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Имеется транспортная сеть с пунктами производства и потребления продукции различного вида. Сеть представлена в виде графа, состоящего из вершины (пунктов производства и потребления продукции) и дуг (путей поставки продукции). Необходимо выбрать пути доставки продукции и определить объемы производства продукции с минимальными затратами.

Введем обозначения:

i, j — вершины графа (пункты производства и потребления продукции);
ij — дуга графа (часть транспортной сети, по которой перевозится продукция из пункта i в пункт j);
k — вид продукции;
l — число всех видов продукции;
U — множество дуг графа;
V — множество вершин графа;
A — множество вершин графа, из которых продукцию отправляют;
B — множество вершин графа, в которых продукцию получают;
D — множество вершин графа — промежуточных пунктов;
A_{jk} — объем потребления продукции k-го вида в j-м пункте (j-я вершина графа);
Q_{ik} — затраты на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии;
N_{ik} — максимально возможные мощности i-го предприятия по выпуску продукции k-го вида;
C_{ijk} — стоимость перевозки единицы продукции k-го вида по дуге ij (из i-го пункта в j-й);
x_{ijk} — объем перевозок k-го вида продукции по дуге ij.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{ij \in U} (Q_{ik} + C_{ijk})\, x_{ijk} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{r} x_{irk} - \sum_{p} x_{pik} \leq N_{ik} \quad (i \in A;\ k = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{p} x_{pjk} - \sum_{r} x_{jrk} = A_{jk} \quad (j \in B;\ k = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{r} x_{irk} - \sum_{p} x_{pik} = 0 \quad (i \in D;\ k = 1, 2, \ldots, l).$$

Суммирование по r означает вывоз продукции из пункта i по всем возможным направлениям r, суммирование по p означает ввоз в пункт i из всех возможных направлений p транспортной сети.

ВАРИАНТНАЯ МНОГОПРОДУКТОВАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

На транспортной сети отмечены пункты производства и потребления продукции различного вида, сеть представлена в виде графа, в каждой вершине которого продукция либо производится, либо потребляется, либо и то и другое. Дуги графа представляют собой пути доставки продукции, условия производства включают сначала выработку одного исходного продукта, который затем перерабатывается в несколько конечных продуктов. Необходимо найти объемы производства и пути доставки продукции при минимальных затратах.

Введем обозначения:

i, j — вершины графа (пункты получения и производства продуктов);
V — множество вершин графа;
ij — дуга графа (часть транспортной сети, по которой осуществляется перевозка продукции из i-го пункта в j-й);
U — множество дуг графа;
k — вид продукции ($k = 1$ — соответствует исходному продукту);
l — число всех видов продукции;
q — номер варианта развития предприятия;
λ_k — выход конечного продукта k-го вида из единицы исходного продукта;
A_{jk} — потребность в продукции k-го вида в каждой вершине графа;
B_{ik} — мощность действующего i-го предприятия по производству k-го вида продукции, которое не предполагается закрывать;
M_{iqk} — мощность i-го предприятия по выпуску k-го вида продукции согласно q-му варианту развития;
Q_{iqk} — удельные затраты на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии согласно q-му варианту развития;
C_{ijk} — стоимость перевозки единицы k-й продукции по дуге ij (от пункта i к пункту j);
C_{jk} — затраты, связанные с потреблением единицы продукции k-го вида в j-м пункте;
x_{ik} — объем производства продукции k-го вида в i-м пункте в условных единицах;

x_{ijk} — объем перевозки k-го вида продукции по дуге ij (от пункта i в пункт j);

y_{jk} — объем потребления продукции k-го вида в j-м пункте;

z_{ikq} — равно 1, если в i-м пункте принят q-й вариант развития по производству k-го вида продукции, и равно 0 в противном случае.

Математическая модель. Найти минимум затрат на производство и транспортировку продукции

$$F = \sum_{ikq} Q_{iqk} M_{iqk} z_{ikq} + \sum_{i,j \in U} \sum_{k=2}^{l} C_{ijk} x_{ijk} + $$

$$+ \sum_{j} \sum_{k=2}^{l} C_{jk} y_{jk} \to \min$$

при ограничениях: по соответствию объемов производства типовым мощностям

$$x_{ik} = \sum_{q} N_{iqk} z_{ikq},$$

по выбору единого варианта каждого развивающегося предприятия

$$\sum_{q} z_{ikq} \leqslant 1,$$

по балансу производства, получения, вывоза и потребления продукции в каждом пункте

$$B_{ik} + \lambda_k x_{ik} + \sum_{i,j \in U} x_{ijk} - \sum_{i,j \in U} x_{jik} - y_{ik} = 0 \ (i \in V;\ k \neq 1),$$

по удовлетворению потребностей в продукции каждого потребителя

$$y_{jk} = A_{jk},$$

по обеспечению производства каждого из продуктов объемом производства исходного продукта

$$x_{i1} = \sum_{k=2}^{l} x_{ik} \ (i \in V),$$

по неотрицательности переменных

$$x_{ik} \geqslant 0;\ x_{ijk} \geqslant 0,\ y_j \geqslant 0 \ (i \in V;\ j \in V;\ k = 1, 2, \ldots, l).$$

ВАРИАНТНАЯ МНОГОПРОДУКТОВАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Необходимо определить оптимальные мощности предприятий по выпуску продукции различного вида и транспортные потоки с минимальными затратами.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер потребителя продукции;
m — число всех потребителей;
q — номер варианта развития предприятия;

u_i — число всех вариантов развития i-го предприятия;
k — вид продукции;
l — число всех видов продукции;
N_{ikq} — мощность i-го предприятия по производству k-го вида продукции согласно q-му варианту;
Q_{ikq} — затраты на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии согласно q-го варианта;
A_{jk} — объем поставки k-го вида продукции j-му потребителю;
C_{ijk} — затраты на перевозку единицы продукции k-го вида из i-го предприятия q-му потребителю;
x_{ikq} — искомая величина, равная 1, если на i-м предприятии выбирается q-й вариант по производству k-го вида продукции;
x_{ijk} — объем перевозки k-го вида продукции из i-го предприятия j-му поставщику.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{u_i} \sum_{k=1}^{l} Q_{ikq} x_{ikq} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} C_{ijk} x_{ijk} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ijk} \leqslant \sum_{q=1}^{u_i} N_{ikq} x_{ikq} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, l),$$

на потребление продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = A_{ik} \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, l),$$

на выбор варианта развития предприятия

$$\sum_{q=1}^{u_i} x_{ikq} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, l),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{ijk} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, \ldots, m; \; k = 1, 2, \ldots, l).$$

Полученная модель является задачей смешанного типа. Для решения этой задачи разработаны специальные методы.

МОДЕЛЬ БЕЗВАРИАНТНОЙ МНОГОЭТАПНОЙ МНОГОПРОДУКТОВОЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Несколько видов продукции производится в несколько этапов на различных предприятиях, надо разместить производство с минимальными затратами.

Введем обозначения:
t — номер этапа;
T — число всех этапов;
u — номер предприятия на t-м этапе;
n_t — число предприятий на t-м этапе;
j — номер потребителя;

m — число потребителей;
k — вид продукции;
l — число всех видов продукции;
v — номер предприятия на $(t+1)$-м этапе;
w_{kt} — коэффициент соизмерения сырья или продукции k-го вида при переходе продукта t-го этапа в продукт $(t+1)$-го этапа;
a^u_{kt} — максимально возможные объемы производства k-й продукции на u-м предприятии t-го этапа;
A_{jk} — объем потребления k-го продукта на j-м пункте;
Q^u_{kt} — затраты на переработку единицы продукции k-го вида на u-м предприятии t-го этапа;
C^{uv}_{kt} — затраты на перевозку единицы продукции k-го вида из u-го предприятия t-го этапа на v-е предприятие $(t+1)$-го этапа;
x^{uv}_{kt} — объем перевозки единицы продукции k-го вида из u-го предприятия t-го этапа на v-е предприятие $(t+1)$-го этапа.

Математическая модель: найти минимум затрат на производство и транспортировку сырья и продукции

$$\sum_{T=1}^{T-1}\sum_{u=1}^{n_t}\sum_{v=1}^{n_{t+1}}\sum_{k=1}^{l} Q^u_{kt}\, w_{kt}\, x^{uv}_{kt} + \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{u=1}^{n_t}\sum_{v=1}^{n_{t+1}}\sum_{k=1}^{l} C^{uv}_{kt} \times$$
$$\times\, x^{uv}_{kt} \to \min$$

при условиях: на объем производства

$$\sum_{v=1}^{n_{t+1}} w_{kt}\, x^{uv}_{kt} \leqslant a^u_{kt}\ (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ u = 1, 2, \ldots, n_t;\ \ k = 1, 2, \ldots, l),$$

на возможности переработки

$$\sum_{u=1}^{n_t} w_{kt}\, x^{uv}_{kt} \leqslant a^v_{kt+1}\ (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ v = 1, 2, \ldots, n_{t+1};\ k = 1, 2, \ldots, l),$$

на баланс ввоза и вывоза с учетом соизмерения сырья и продукции

$$\sum_{u=1}^{n_t} w_{kt}\, x^{uv}_{kt} = \sum_{u=1}^{n_{t+1}} w_{kt+1}\, x^{vu}_{kt+1}\ \ (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ v = 1, 2, \ldots, n_{t+1};$$
$$t = 1, 2, \ldots, T-1),$$

на удовлетворение потребности в продукции на последнем этапе

$$\sum_{u=1}^{n_{T-1}} x^{uj}_{kT-1}\, w_{kT-1} = A_{jk}\ (j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, l),$$

на неотрицательность переменных

$$x^{uv}_{kt} \geqslant 0\ (u = 1, 2, \ldots, n_t;\ v = 1, 2, \ldots, n_{t+1};\ k = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T).$$

Для выполнения условий совместности необходимо выполнить следующие соотношения:

$$\sum_{u=1}^{n_t} a^u_{kt} \geqslant \sum_{u=1}^{n_{t+1}} a^u_{kt+1} \geqslant \sum_{j=1}^{m} A_{jk}.$$

Решив эту задачу методами линейного программирования, определим потоки продукции x_{kt}^{uv}, затем мощность u-го предприятия t-го этапа по производству k-го вида продукции

$$N_{kut} = \sum_{v=1}^{n_{t+1}} x_{kt}^{uv} w_{kt} \quad (k = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T;\ u = 1, 2, \ldots, n_t).$$

МОДЕЛЬ ВАРИАНТНОЙ МНОГОПРОДУКТОВОЙ МНОГОЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Требуется разместить предприятия, производящие несколько видов продукции в несколько этапов с минимальными общими затратами на производство и транспортировку продукции.

Введем обозначения:

t — номер этапа;
T — число всех этапов;
n_t — число всех предприятий на t-м этапе;
u — номер предприятия на t-м этапе;
v — номер предприятия на $(t+1)$-м этапе;
q — номер варианта развития предприятия;
k — номер вида продукции;
l — число всех видов продукции;
Q_u — число всех вариантов развития для u-го предприятия t-го этапа;
j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
N_{tq}^{ku} — мощность u-го предприятия t-го этапа по выпуску k-го вида продукции согласно q-му варианту;
A_{jk} — объем потребления конечной продукции k-го вида на j-м пункте потребления;
w_{tk} — коэффициент соизмерения сырья или продукции k-го этапа с продукцией $(t+1)$-го этапа;
C_{tq}^{ku} — затраты на производство единицы подукции k-го вида на u-м предприятии t-го этапа согласно q-му варианту развития;
C_{tk}^{uv} — затраты на перевозку единицы продукции k-го вида из u-го предприятия t-го этапа в q-е предприятие $(t+1)$-го этапа;
x_{tq}^{ku} — переменная, равная 1, если на u-м предприятии t-го этапа выбирается q-й вариант развития производства k-го вида продукции, и равная 0 в противном случае;
x_{tk}^{uv} — объем перевозки продукции k-го вида из u-го предприятия t-го этапа в v-е предприятие $(t+1)$-го этапа.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{t=1}^{T-1} \sum_{u=1}^{n_t} \sum_{q=1}^{Q_u} \sum_{k=1}^{l} C_{tq}^{ku} N_{tq}^{ku} w_{tk} x_{tq}^{ku} + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{u=1}^{n_t} \sum_{v=1}^{n_{t+1}} \sum_{k=1}^{l} \times$$
$$\times C_{tk}^{uv} w_{tk} x_{tk}^{uv} \to \min$$

при ограничениях: на возможность выбора только одного варианта развития на каждом предприятии

$$\sum_{q=1}^{Q_u} x_{tq}^{ku} \leqslant 1 \quad (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ k = 1, 2, \ldots, l;\ u = 1, 2, \ldots, n_t),$$

на возможность мощности предприятий

$$\sum_{v=1}^{n_{t+1}} w_{tk}\, x_{tk}^{uv} \leqslant \sum_{q=1}^{Q_u} N_{tq}^{ku}\, x_{tq}^{ku}\ (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ k = 1, 2, \ldots, l;\ u = 1, 2, \ldots, n_t),$$

объем поставок не должен превышать возможности переработки

$$\sum_{u=1}^{n_t} w_{tk}\, x_{tk}^{uv} \leqslant \sum_{q=1}^{Q} N_{t+1,q}^{kv}\, x_{t+1,q}^{kv}\ (t = 1, 2, \ldots, T-1;\ k = 1, 2, \ldots, l;\ v = 1, 2, \ldots, n_{t+1}),$$

на каждом предприятии ввоз должен соответствовать вывозу

$$\sum_{u=1}^{n_t} w_{tk}\, x_{tk}^{uv} = \sum_{u=1}^{n_{t+1}} w_{t+1,k}\, x_{t+1,k}^{vu} \begin{pmatrix} v = 1, 2, \ldots, n_{t+1}; \\ t = 1, 2, \ldots, T-1; \\ k = 1, 2, \ldots, l, \end{pmatrix},$$

на удовлетворение потребностей в конечной продукции

$$\sum_{u=1}^{n_{T-1}} x_{T-1,k}^{uj}\, w_{t-1,k} = A_{jk}\ \ (j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, l),$$

поставки должны быть неотрицательными

$$x_{tk}^{uv} \geqslant 0\ (u = 1, 2, \ldots, n_t;\ v = 1, 2, \ldots, n_{t+1};\ k = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T-1).$$

Для выполнения совместности условий задачи необходимо выполнить следующие неравенства:

$$\sum_{u=1}^{n_t} N_{tq}^{ku} \geqslant \sum_{u=1}^{n_{t+1}} N_{t+1,q}^{ku} \geqslant \sum_{j=1}^{n_T} A_{jk}.$$

Решив эту задачу специальными методами, находим мощности x_{tq}^{ku} и транспортные потоки x_{tk}^{uv}.

Объем производства k-го вида продукции на u-м предприятии t-го этапа определяется по формуле

$$M_{tk}^{u} = \sum_{v=1}^{n_{t+1}} w_{tk}\, x_{tk}^{uv}\ (u = 1, 2, \ldots, n_t;\ t = 1, 2, \ldots, T-1;\ k = 1, 2, \ldots, l).$$

МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРЯМЫХ СВЯЗЕЙ

Устанавливают долговременные прямые связи между предприятиями, производящими продукцию, и потребителями. Эти прямые связи устанавливают для упрощения и улучшения материально-технического снабжения, современного обеспечения потребителя продукцией определенного вида, выпускаемой на определенных предприятиях. С другой стороны, прямые договорные отношения дают больше гарантий своевременной поставки продукции определенного вида и качества. Простои предприятия из-за несвоевременной поставки продукции могут обойтись народному хозяйству дороже, чем экономия на транспортных расходах, при других вариантах поставок. Поэтому

ставится задача размещения предприятий, производящих продукцию и поставляющих ее на основе прямых договоров таким образом, чтобы общие приведенные и транспортные затраты были наименьшими и выполнялись договора по производству и поставкам продукции. С этой целью намечают ряд мест расположения предприятия. Пусть имеется n мест, занумерованных в определенном порядке ($j = 1, 2, \ldots, n$). Имеется также n предприятий ($i = 1, 2, \ldots, n$). Каждое из этих предприятий можно разместить только в одном месте, и в каждом месте можно расположить только одно из этих предприятий. Очевидно, капитальные вложения и себестоимость производимой продукции будут зависеть от места расположения предприятий. Обозначим b_{ij} — приведенные затраты на выпуск всей продукции i-м предприятием, если оно будет расположено в j-м месте. Кроме размещаемых предприятий имеются еще и действующие предприятия с номерами $n+1, n+2, \ldots, m$, на которых будет потребляться продукция размещаемых предприятий. Согласно прямым договорам, каждое размещаемое предприятие должно поставлять свою продукцию другим предприятиям в определенном, заранее заданном объеме и ассортименте. Обозначим a_{ir} — стоимость перевозки всей продукции, поставляемой из i-го предприятия r-му предприятию, на единицу расстояния; C_{ir} — расстояние между i-м и r-м пунктами. Постоянную составляющую транспортных расходов учитывать не будем, так как при заданном объеме перевозок она в сумме не будет зависеть от размещения предприятий. Таким образом, исходные данные задачи размещения с учетом взаимосвязей заданы в виде матриц

$$B = (b_{ij}) \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n; \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}; \quad C = (C_{ir}) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n; \\ r = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ir}) \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ r = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}; \quad E = (l_{ij}) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица с элементами l_{ij} при $i \neq j$ и $l_{ii} = 1$.

Если 1-е предприятие назначить на 1-е место, 2-е на 2-е и т. д., т. е. i-е предприятие на i-е место ($i = 1, 2, \ldots, n$), то общие затраты

$$M(A,B,C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} l_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} a_{ir} C_{ir}.$$

Если теперь осуществить другое распределение согласно подстановке $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, т. е. t_1-е предприятие назначить на 1-е место, t_2-е на 2-е и т. д., t_n-е на n-е место, то затраты

$$M(A(T), B(T)\, C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{t_i j} l_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} a_{t_i t_r} C_{ir},$$

где $t_r = r$ при $r > n$.

Матрица $B(T)$ образуется из B путем перестановки в ней строк согласно подстановке T, т. е. t_i-ю строку переставляют на место i-й строки. Матрица $A(T)$ образуется из A путем перестановки в ней строк, а затем столбцов согласно подстановке T, т. е. сначала t_i-я строка ставится на место i-й, а затем t_r-й столбец ставится на место r-го столбца.

Оптимизация размещения в этом случае состоит в отыскании такой подстановки для размещения предприятий, при которой достигается минимум затрат $M(A(T), B(T), C)$. Это квадратичная задача о назначениях. Получение точного решения связано с проведением больших расчетов, поэтому точные методы применяют для решения задач небольшой размерности. В реальных задачах размещается обычно большое число предприятий и применяют приближенные методы решения, с помощью которых в результате получают размещение предприятий с учетом прямых связей между ними при наименьших общих затратах на производство и транспортировку продукции.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МНОГОПРОДУКТОВЫЕ МОДЕЛИ РАЗМЕЩЕНИЯ

Необходимо получить оптимальное размещение производства нескольких продуктов на предприятиях при условии, что условия производства и потребления меняются с течением времени. В качестве критерия оптимальности принимают минимум производственно-транспортных затрат.

ЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МНОГОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

В этой задаче затраты на единицу продукции не зависят от объемов производства продукции.

Введем обозначения:

t — номер года;
T — число лет планового периода;
i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер пункта потребления;
m — число всех пунктов потребления;
k — номер вида продукции;
l — число всех видов продукции;
a_{ikt} — максимальная мощность i-го предприятия по производству k-го вида продукции в t-м году;
A_{kjt} — объем поставок k-го вида продукции в j-й пункт потребления в t-м году;
Q_{ikt} — затраты на производство единицы продукции k-го вида на i-м предприятии в t-м году;
C_{ijkt} — стоимость перевозки единицы продукции k-го вида из пункта производства i в пункт j в t-м году;
x_{ikt} — объем производства k-го вида продукции на i-м предприятии в t-м году;
x_{ijkt} — объем перевозки k-го вида продукции из пункта производства i в пункт j в t-м году.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} Q_{ikt}\,x_{ikt} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} C_{ijkt}\,x_{ijkt} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$x_{ikt} = \sum_{j=1}^{m} x_{ijkt} \leqslant a_{ikt} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, l;\ t = 1, 2 \dots, T),$$

на потребление продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijkt} = A_{kjt}\,(k = 1, 2, \dots, l;\ j = 1, 2, \dots, m;\ t = 1, 2, \dots, T),$$

на необходимость увеличения плана производства продукции с каждым годом

$$0 \leqslant x_{ikt} \leqslant x_{ikt+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2 \dots, l;\ t = 1,2, \dots, T-1).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ВАРИАНТНОЙ МНОГОПРОДУКТОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
n — число всех предприятий;
j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
k — вид производимой продукции;
l — число всех видов продукции;
t — номер года;
T — число лет планового периода;
q — номер варианта развития предприятия;
u_i — число всех вариантов развития i-го предприятия;
A_{kjt} — объем потребления продукции k-го вида в t-м году на j-м пункте;
N_{iq}^{kt} — мощность i-го предприятия по производству k-го вида продукции в t-м году согласно q-го варианта развития;
Q_{iq}^{kt} — затраты на производство продукции k-го вида на i-м предприятии в t-м году согласно q-му варианту развития;
C_{ij}^{kt} — стоимость перевозки единицы продукции k-го вида в t-м году из i-го предприятия j-му потребителю;
x_{iq}^{kt} — величина, равная 1, если на i-м предприятии в t-м году принят q-й вариант производства продукции k-го вида, и равная 0 в противном случае;
x_{ij}^{kt} — объем перевозки k-го вида продукции в t-м году из i-го предприятия j-му потребителю.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\sum_{q=1}^{u_i} Q_{iq}^{kt}\, x_{iq}^{kt} + \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}^{kt}\, x_{ij}^{kt} \to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{kt} \leqslant \sum_{q=1}^{u_i} N_{iq}^{kt}\, x_{iq}^{kt} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \dots, l;\ i = 1, 2, \dots, n; \\ t = 1, 2, \dots, T \end{pmatrix},$$

на потребление продукции

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{kt} = A_{kjt} \quad (k = 1, 2, \dots, l;\ j = 1, 2, \dots, m;\ t = 1, 2, \dots, T)$$

при необходимости соблюдения динамики роста производства

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{kt} \leqslant \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{kt+1} \ (i = 1, 2, \dots, n;\ t = 1, 2, \dots, T-1;\ k = 1, 2, \dots, l),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{ij}^{kt} \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, l;\ t = 1, 2, \dots, T).$$

Сырье поступает на переработку, а готовая продукция поступает потребителю. Требуется определить оптимальное размещение производства.

Введем обозначения:

g — номер вида сырья;
G — число всех видов сырья;
u — номер пункта добычи сырья;
H — число всех пунктов добычи сырья;
t — номер года;
T — число всех лет планового периода;
s — вид ресурса;
S — число всех видов используемых ресурсов;
v — номер предприятия по переработке сырья и выпуску продукции;
V — число всех предприятий по выпуску продукции;
j — номер потребителя;
m — число всех потребителей;
q — номер варианта развития предприятия по выпуску продукции;
Q_v — число всех вариантов развития v-го предприятия по выпуску продукции;
Q_{gut} — максимально возможный объем добычи сырья g-го вида на u-м пункте в t-м году;
R_{guvt} — затраты на перевозку единицы сырья g-го вида из u-го пункта добычи в v-е предприятие в t-м году;
b_{gvqtk} — расход сырья g-го вида на производство единицы продукции k-го вида на v-м предприятии в t-м году согласно q-му варианту развития;
A_{jkt} — объем потребления k-го вида продукции j-м потребителем в t-м году;
C_{kvjt} — стоимость перевозки единицы продукции k-го вида из v-го предприятия j-му потребителю в t-м году;
N_{vktq} — мощность v-го предприятия по выпуску продукции k-го вида в t-м году согласно q-му варианту;
P_{vktq} — затраты на производство единицы продукции k-го вида на v-м предприятии в t-м году согласно q-му варианту;
a_{svktq} — норма потребления s-го вида ресурса на v-м предприятии при производстве k-го вида продукции в t-м году согласно q-му варианту;
b_{st} — количество s-го вида ресурса, выделяемого в t-м году для производства продукции;
x_{guvt} — объем перевозки g-го вида сырья из u-го пункта добычи в v-е предприятие в t-м году;
y_{vktq} — переменная, равная 1, если в t-м году на v-м предприятии выбирается q-й вариант развития по производству k-го вида продукции, и равная 0 в противном случае;
z_{kvjt} — объем перевозок k-го вида продукции из v-го предприятия j-му потребителю в t-м году.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{g=1}^{G}\sum_{u=1}^{H}\sum_{v=1}^{v}\sum_{t=1}^{T} R_{guvt}\,x_{guvt} + \sum_{v=1}^{v}\sum_{k=1}^{l}\sum_{t=1}^{T}\sum_{q=1}^{Q} N_{vktq}\,p_{vktq}\times$$

$$\times\, y_{vktq} + \sum_{k=1}^{l}\sum_{v=1}^{V}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} C_{kvjt}\,z_{kvjt} \to \min$$

при ограничениях: на распределение сырья

$$\sum_{v=1}^{V} x_{guvt} \leqslant Q_{gut} \quad (g = 1, 2, \ldots, G;\ u = 1, 2, \ldots, H;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на удовлетворение потребностей в сырье

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q_v} b_{gvqtk} N_{vktq} y_{vktq} = \sum_{u=1}^{H} x_{guvt} \quad (g = 1, 2, \ldots, G;\ v = 1, 2, \ldots, V;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на удовлетворение потребностей в ресурсах

$$\sum_{v=1}^{V} \sum_{g=1}^{Q_v} N_{vktq} a_{svktq} y_{vktq} \leqslant b_{st} \quad (s = 1, 2, \ldots, S;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на выполнение условий производства и перевозок продукции

$$\sum_{j=1}^{m} z_{kvjt} \leqslant \sum_{q=1}^{Q_v} N_{vktq} y_{vktq} \quad (v = 1, 2, \ldots, V;\ k = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на удовлетворение потребителей в продукции

$$\sum_{v=1}^{V} z_{kvjt} = A_{jkt} \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{guvt} \geqslant 0,\ z_{kvjt} \geqslant 0 \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots, G;\ u = 1, 2, \ldots, H;\ v = 1, 2, \ldots, V, \\ k = 1, 2, \ldots, l;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, T \end{pmatrix}.$$

МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ В ОТРАСЛИ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Основными задачами оптимизации распределения капитальных вложений являются обеспечение сокращения распыления средств, ускорение ввода в действие производственных мощностей и основных фондов, сокращение сроков проектирования и строительства объектов, своевременное освоение введенных мощностей согласно плану, повышение рентабельности действующих предприятий и новостроек. Для повышения эффективности капитальных вложений в условиях ограниченности ресурсов большое значение приобретает очередность строительства, т. е. получение оптимального распределения лимитов капитальных вложений по объектам и годам строительства. В соответствии с планом министерства отрасли строительные организации ведут большую подготовительную работу по изучению технической документации, определению потребности в ресурсах, организации заказов на материалы, размещению запросов по изготовлению оборудования на заводах и т. д.

В разработке планов развития отрасли необходимо рассматривать различные варианты распределения капитальных вложений и выбрать из них оптимальный. Выбор объектов и последовательность их строительства можно получить с помощью применения экономико-математических методов и ЭВМ. Эти методы позволяют в допустимые сроки выбрать основные варианты плана и найти оптимальное решение в зависимости от специфики отрасли (минимум приведенных затрат, максимум прибыли, ввода фондов, мощностей и т. д.). Главные ограничения: лимиты капитальных вложений,

объемы строительно-монтажных работ, ввод мощностей, возможности строительных организаций, наличие проектно-сметной документации и заделов. Чтобы правильно регулировать объем капитальных вложений на переходящие объекты и новостройки для осуществления строительства согласно нормам и правилам, необходимо обеспечить определенные заделы. Этого можно достигнуть в результате концентрации средств на объектах, уменьшения числа начатых объектов строительства, оптимизации планирования и распределения капитальных вложений.

Эффективность капитальных вложений в значительной степени определяется сбалансированностью планов капитального строительства министерства с планами других отраслей народного хозяйства по вводу основных фондов, использованию ресурсов. Министерства должны разрабатывать балансы производственных мощностей и оборудования в стоимостных и натуральных показателях, балансы материалов для нужд капитального строительства; определять расчетные мощности строительно-монтажных организаций в территориальном разрезе и использовать их в разработке и корректировке планов капитального строительства. Объекты, включенные в план капитального строительства, должны быть своевременно обеспечены рабочими чертежами, оборудованием, материалами и т. д. Сроки строительства в целом по стройкам и отдельным объектам, а также выделяемые для них капитальные вложения по годам планового периода должны отвечать строительным нормам. Математические модели распределения капитальных вложений разрабатывают с учетом особенностей отрасли.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ С УЧЕТОМ НЕПРЕРЫВНОГО ВВОДА МОЩНОСТЕЙ

Для сокращения распыленности средств и увеличения ввода основных фондов при условиях ввода мощностей пропорционально капитальным вложениям используют критерий максимизации — ввод основных фондов.

Введем обозначения:

t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
K_t — лимит капитальных вложений в t-м году;
r — вид мощности;
i — номер стройки;
n — число всех строек;
R_i — остаток капитальных вложений i-й стройки;
f_i — остаток основных фондов i-й стройки;
Π_i — приоритет i-й стройки;
M_{tr} — план по вводу мощностей r-го типа в t-м году в целом по отрасли за счет всех строек;
m_{ir} — ввод мощностей r-го типа на единицу капитальных вложений i-й стройки;
T_i — время продолжительности строительства i-й стройки в годах;
a_{it}, b_{it} — нижняя и верхняя границы выделяемых капитальных вложений i-й стройки в t-м году;
x_{it} — искомый объем капитальных вложений, выделяемых на i-ю стройку в t-м году.

Математическая модель состоит в определении таких значений x_{it}, при которых достигается максимум ввода взвешенных основных фондов

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T_i}\frac{f_i \Pi_i x_{it}}{R_i} \to \max$$

при ограничениях: на общий лимит капитальных вложений

$$\sum_{i=1}^{n} x_{it} \leqslant K_t \quad (t = 1, 2, \dots, T),$$

на сметную стоимость каждой стройки

$$\sum_{t=1}^{T_i} x_{it} \leqslant R_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

на ввод мощностей

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ir} x_{it} \geqslant M_{rt} \quad (t = 1, 2, \dots, T),$$

на реальные возможности

$$a_{it} \leqslant x_{it} \leqslant b_{it} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \; t = 1, 2, \dots, T).$$

Построенная модель относится к классу задач линейного программирования. При максимизации целевой функции будет отдаваться предпочтение тем стройкам, у которых большой приоритет и остаток основных фондов, но меньше остаток сметной стоимости.

В этой модели величины R_i и f_i соответственно выражают для новостроек полную сметную стоимость и все основные фонды, а для переходящих строек — те капитальные вложения и основные фонды, которые предстоит освоить и ввести в плановом периоде. Число $П_i$ обозначает приоритет, который задается плановыми органами, либо рассчитывается. Например, $П_i$ может быть равен отношению годовой потребности в продукции к существующему годовому производству продукции i-го предприятия. Приведенная модель может измениться и дополниться в зависимости от требований.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ С ВЫДЕЛЕНИЕМ СРЕДСТВ НА ОБОРУДОВАНИЕ

Оптимизация распределения капитальных вложений производится с учетом распределения средств на строительно-монтажные работы и оборудование.

Введем обозначения:

i — номер объекта строительства;
n — число переходящих объектов;
m — число всех объектов;
$m - n$ — число новостроек; нумерация строек произведена так, что сначала занумерованы переходящие объекты (для них $i \leqslant n$), а затем новостройки (для них $m - n < i \leqslant m$);
a_{it} — наименьшее значение для выделяемых объемов строительно-монтажных работ i-му переходящему объекту в t-м году ($i \leqslant n, \; t \leqslant T$);
b_{it} — наибольшее значение для выделяемых объемов строительно-монтажных работ i-му объекту в t-м году планового периода ($i \leqslant m, \; t \leqslant T$), для $t < \tau_i$ и $i > n$ полагаем $b_{it} = 0$;
c_{it} — наименьшее значение для выделяемых капитальных вложений на оборудование i-му переходящему объекту в t-м году планового периода ($i \leqslant n, \; t \leqslant T$);
d_{it} — наибольшее значение для выделяемых капитальных вложений на оборудование i-му объекту в t-м году планового периода ($i \leqslant m, \; t \leqslant T$), для $t < \tau$ и $i > n$ принимаем $d_{it} = 0$;
τ_i — год наиболее раннего начала строительства новостройки ($i > n$);

Θ_i — год наиболее позднего начала строительства новостройки $(i > n)$;

T_i — максимальная продолжительность строительства i-го объекта $(i \leqslant m)$ в плановом периоде;

Q_i — объем строительно-монтажных работ на i-м объекте (для переходящих объектов — это остаток на начало планового периода, для новостройки — это весь объем);

R_i — объем капитальных вложений на оборудование на i-м объекте (для переходящих строек — это остаток на начало планового периода, для новостроек — это весь объем);

f_i — основные фонды i-го объекта (для переходящих объектов — это остаток не введенных основных фондов на начало планового периода, для новостроек — это все основные фонды);

Π_i — приоритет i-го объекта;

E — нормативный коэффициент капитальных вложений в отрасли машиностроения;

S_t — лимит объема строительно-монтажных работ на t-й год планового периода;

K_t — лимит объема капитальных вложений на оборудование в t-й год планового периода;

x_{it} — искомый объем строительно-монтажных работ, выделяемых i-му объекту в t-м году планового периода $(i \leqslant m;\ t \leqslant T)$;

y_{it} — искомый объем капитальных вложений на оборудование, выделяемый i-му объекту в t-м году планового периода $(i \leqslant m;\ t \leqslant T)$.

Математическая модель. Найти максимум взвешенных фондов

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} \frac{(x_{it} + y_{it}) f_i \Pi_i}{(Q_i + R_i)(1 - E)^t}$$

при ограничениях: на выделяемые объемы строительно-монтажных работ для каждого объекта

$$a_{it} \leqslant x_{it} \leqslant b_{it} \quad (i \leqslant n);$$

$$0 \leqslant x_{it} \leqslant b_{it} \quad (m - n < i \leqslant m);$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} x_{it} \leqslant Q_i \quad (i \leqslant n);$$

$$\sum_{t=\tau_i}^{\theta_i + T_i} x_{it} \leqslant Q_i \quad (i > n),$$

на выполняемые объемы строительно-монтажных работ в целом по отрасли

$$\sum_{i=1}^{m} x_{it} < S_t \quad (t = 1, 2, \dots, T),$$

на выделяемые объемы капитальных вложений на оборудование каждому объекту

$$c_{it} \leqslant y_{it} \leqslant d_{it} \quad (i \leqslant n);$$

$$0 \leqslant y_{it} \leqslant d_{it} \quad (m - n < i \leqslant m);$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} y_{it} \leqslant R_i \quad (i \leqslant n);$$

$$\sum_{t=\tau_i}^{\theta_i + T_i} y_{it} \leqslant R_i \quad (i > n),$$

на выполняемые объемы капитальных вложений на оборудование в целом по отрасли

$$\sum_{i=1}^{m} y_{it} \leqslant K_t \quad (t = 1, 2, \dots, T).$$

Если объем задачи большой для данной ЭВМ, то ее можно разбить на две:

1) найти максимум при ограничениях на объемы строительно-монтажных работ

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} \frac{x_{it} f_i \Pi_i}{(1+E)^t Q_i},$$

2) найти максимум при ограничениях на оборудование

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} \frac{y_{it} f_i \Pi_i}{(1+E)^t R_i}.$$

З а м е ч а н и е 1. Если предполагается, что все переходящие объекты строятся в течение всего планового периода, то ограничение на объем строительно-монтажных работ по i-му объекту для переходящих строек можно записать в виде

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leqslant Q_i \quad (i \leqslant n).$$

Если предположить, что $\tau_i + \Theta_i + T_i \geqslant T$, то ограничения на объемы строительно-монтажных работ для каждой из новостроек запишутся в виде

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leqslant Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

При таких предположениях ограничения на объемы строительно-монтажных работ каждого объекта можно объединить в одно:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leqslant Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Изложенные допущения практически приемлемы, поскольку продление срока строительства переходящего объекта практически не приведет к увеличению срока строительства за счет эффективности (приоритетности этого объекта), а $\tau_i + \Theta_i + T_i$ практически всегда больше T.

В этих же предположениях можно объединить ограничения на оборудование для каждого объекта в одно:

$$\sum_{t=1}^{T} y_{it} \leqslant R_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Тогда поставленная задача оптимального распределения капитальных вложений сводится к транспортной задаче с ограничениями на пропускные способности. Для решения транспортных задач с ограничениями на пропускные способности имеются методы, алгоритмы и программы на ЭВМ.

З а м е ч а н и е 2. При решении задач распределения капитальных вложений по предложенным моделям иногда может оказаться, что в каком-либо году t на i-м объекте будет $x_{it} = 0$, а $y_{it} > 0$. Это значит, что сред-

ства на строительно-монтажные работы не выделяются, а на капитальные вложения и оборудование выделяются. Это означает, что оборудование будет приобретаться заранее. Если это не не приемлемо по каким-либо причинам, то предлагается новая модель распределения капитальных вложений, устраняющая эти недостатки. Для формулировки модели введем обозначение $z_{it} = x_{it} + y_{it}$.

Тогда задача заключается в следующем: найти максимум взвешенных фондов

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{m} \frac{z_{it}\Pi_i f_t}{(Q_i + R_i)(1+E)^t}$$

при ограничениях

$$a_{it} + c_{it} \leqslant z_{it} \leqslant b_{it} + d_{it} \quad (i \leqslant n);$$

$$0 \leqslant z_{it} \leqslant b_{it} + d_{it} \quad (n < i \leqslant m);$$

$$\sum_{t=1}^{T_i} z_{it} \leqslant Q_i + R_i \quad (i \leqslant n);$$

$$\sum_{t=\tau_i}^{\theta_i+T_i} z_{it} \leqslant Q_i + R_i \quad (n < i \leqslant m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{it} \leqslant S_t + K_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, T).$$

Решив эту задачу, найдем z_{it} — общий объем капитальных вложений, выделяемых на каждый объект в каждом году планового периода. Объем строительно-монтажных работ x_{it} находится по формуле

$$z_{it} = Q_i z_{it}/(Q_i + R_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \; t = 1, 2, \ldots, T).$$

В этом случае возможно, что при каких-то t

$$\sum_{i=1}^{m} x_{it} > S_t,$$

т. е. можно не уложиться в выделенный лимит на общий объем строительно-монтажных работ. Если этот лимит нельзя изменить, то решают задачу при ограничениях на объемы строительно-монтажных работ, а затем объем капитальных вложений подсчитывают по формуле $y_{it} = x_{it}R_i / Q_i$. При этом возможно, что при каких-то t

$$\sum_{i=1}^{m} y_{it} > K_t,$$

т. е. можно выйти за лимит капитальных вложений на оборудование. В этом случае необходима корректировка некоторых расчетных данных y_{it} для объектов, не заканчивающихся в плановом периоде. Обозначим M — множество объектов i, которые не будут заканчиваться в плановом периоде; y^*_{it} — скорректированные значения величин капитальных вложений, тогда

$$y^*_{it} = y_{it}\left(K_t + \sum_{i \in M} y_{it} - \sum_{i=1}^{m} y_{it}\right) \Big/ \sum_{i \in M} y_{it}.$$

Разработаны другие виды корректировки, которые используют в зависимости от реальных требований.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ НА НОВОСТРОЙКИ

Титульные списки новостроек с распределением заданий по вводу основных фондов, производственных мощностей и освоению капитальных вложений согласно нормам продолжительности строительства являются неизменным плановым документом на весь период строительства. Поэтому актуальной является задача распределения сроков начала строительства объектов, в которой ввод мощностей осуществляется дискретно только после освоения определенного объема капитальных вложений.

Введем обозначения:

i — номер объекта новостройки;
n — число объектов;
t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
K_t — лимит капитальных вложений на все объекты;
N_{tr} — мощности r-го типа, которые надо ввести в действие в t-м году по всем объектам;
k_{ij} — капитальные вложения, которые выделяются i-му объекту в j-м году (j — номер не календарного года, а очередного с начала строительства);
N_{ijr} — мощности r-го типа, которые вводятся на i-м объекте в j-м году;
P_{it} — прибыль, полученная от эксплуатации i-го объекта за определенный срок при условии, что строительство этого объекта начинается в t-м году;
x_{it} — искомая величина, равная 1, если i-й объект начнется в t-м году, и равная 0 в противном случае.

Математическая модель. Найти такие значения x_{it}, равные 0 или 1, при которых достигается максимум прибыли

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} P_{it} x_{it} \to \max$$

при ограничениях: на лимиты капитальных вложений

$$\sum_{i=1}^{n} k_{i1} x_{i1} \leqslant K_1; \quad \sum_{i=1}^{n} (k_{i2} x_{i1} + k_{i1} x_{i2}) \leqslant K_2;$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{n} (k_{iT} x_{i1} + k_{iT-1} x_{i2} + \ldots + k_{i1} x_{iT}) \leqslant K_T,$$

на вводимые мощности

$$\sum_{i=1}^{n} N_{i1r} x_{i1} \geqslant N_{1r};$$

$$\sum_{i=1}^{n} (N_{i2r} x_{i1} + N_{i1r} x_{i2}) \geqslant N_{2r};$$

. . . .

$$\sum_{i=1}^{n} (N_{iTr} x_{i1} + N_{iT-1r} x_{i2} + \ldots + N_{i1r} x_{iT}) \geqslant N_{Tr},$$

на выбор срока начала строительства объекта

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leqslant 1.$$

Это задача линейного целочисленного программирования, для решения которой нет эффективных точных методов, поэтому используют приближенные методы.

Прибыль P_{it} вычисляется по формуле

$$P_{it} = R_{i1}(1+E)^{Q-\tau_i-t} + R_{i2}(1+E)^{Q-\tau_i-t-1} + \dots + R_{iQ-\tau_i-t},$$

где R_{il} — прибыль от эксплуатации i-го объекта в l-м году после окончания его строительства; τ_i — срок строительства i-го объекта; Q — некоторый срок времени, охватывающий период строительства и эксплуатации объектов (одинаковый для всех объектов); E — норматив эффективности.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ НА ПЕРЕХОДЯЩИЕ И ВНОВЬ НАЧИНАЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ СТРОИТЕЛЬСТВА

При использовании этой модели получают значения капитальных вложений по годам планового периода для переходящих и вновь начинаемых объектов. Для новостроек выделяют капитальные вложения согласно нормам, т. е. определяют срок начала строительства. В этом случае решают задачу оптимального распределения данного лимита капитальных вложений по объектам строительства таким образом, чтобы уменьшить замораживаемость средств во время строительства объектов, сократить их распыленность, уменьшить незавершенное строительство, повысить экономическую эффективность плана капитального строительства и ввести необходимые мощности.

Введем обозначения:

i — номер стройки;
m — число переходящих строек и $(n-m)$ — число новостроек (если $i \leqslant m$, то это переходящая стройка, если $i > m$, то это новостройка);
P_i — планируемая годовая прибыль от производственной деятельности i-го предприятия (стройки) после окончания строительства;
Q_i — остаток сметной стоимости i-й стройки;
a_{ij} и b_{ij} — нижняя и верхняя границы для выделяемых капитальных вложений i-й стройке в j-м году (для переходящих строек j — это год планового периода, для новостроек — это порядковый номер года строительства, начиная с начального года);
t — год планового периода ($t = 1, 2, \dots, T$);
K_t — лимит капитальных вложений на все стройки в t-м году;
E — нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений;
x_{it} — искомый объем выделяемых капитальных вложений i-й стройке в t-м году планового периода;
N_{ir} — мощности r-го типа, которые надо ввести на i-й стройке;
W_{tr} — мощности r-го типа, которые надо ввести в t-м году планового периода за счет всех строек.

Математическая модель. Найти максимум взвешенной прибыли

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \frac{x_{it} P_i}{(1+E)^{t-1} Q_i} \to \max$$

при ограничениях: на лимит капитальных вложений

$$\sum_{i=1}^{n} x_{it} \leqslant K_t \ (t = 1, 2, \ldots, T),$$

на остаток сметной стоимости

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leqslant Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

на реальные возможности для переходящих объектов

$$a_{it} \leqslant x_{it} \leqslant b_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на реальные возможности для новостроек

$$-x_{it} + C_{i1} x_{it-1} + \cdots + C_{iT-1} x_{i1} \leqslant 0 \quad (t = 1, 2, \ldots, T);$$

$$x_{it} + x_{it-1}(1 - B_{i1}) + \cdots + x_{i1}\left(1 - \sum_{q=1}^{t-1} B_{iq}\right) \leqslant b_{i1} \ (m \leqslant i \leqslant n),$$

$$\text{где } C_{i1} = \frac{a_{i2}}{b_{i1}};\ B_{i1} = \frac{b_{i2}}{b_{i1}},$$

а остальные находят из рекуррентных соотношений

$$C_{iq-1} = \frac{1}{b_{i1}}(a_{iq} - C_{iq-2} b_{i2} - \cdots - C_{i1} b_{iq-1});$$

$$B_{iq-1} = \frac{1}{b_{i1}}(b_{iq} - B_{iq-2} b_{i2} - \cdots - B_{i1} b_{iq-1}),$$

на ввод мощностей

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{N_{ir}}{Q_i} x_{it} \geqslant W_{tr}.$$

Решение этой задачи на ЭВМ (табл. 23) дает оптимальное распределение лимитов капитальных вложений $K_1 = 1520$ тыс. руб., $K_2 = 1600$ тыс. руб., $K_3 = 2320$ тыс. руб., $K_4 = 2170$ тыс. руб., $K_5 = 2100$ тыс. руб. по объектам и годам планового периода, из которого затем выбирают объекты отраслей или главков, суммируют для них капитальные вложения и получают распределение капитальных вложений по отраслям или главкам.

ВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ ВЫБОРА ОБЪЕКТОВ СТРОИТЕЛЬСТВА В ПЛАНОВОМ ПЕРИОДЕ

Из нескольких объектов, которые могут развиваться по нескольким вариантам, надо получить оптимальный набор с учетом лимита капитальных вложений в отрасли.

Введем обозначения:

i — номер объекта строительства;
n — число всех объектов строительства;
q — номер варианта развития объекта;
m_i — число всех вариантов развития i-го объекта;
t — год планового периода;
T — число лет планового периода;

23. Распределение капитальных вложений по объектам отрасли на основе модели распределения капитальных вложений на переходящие и вновь начинаемые объекты

Начальная информация							Прибыль, тыс. руб.	Конечная информация					
№ объекта	Смета Q_{ik}, тыс. руб.	Нижняя и верхняя границы капиталовложений, тыс. руб.						Оптимальное распределение капиталовложений по годам, тыс. руб.					Остаток, тыс. руб.
		a_{i1}	b_{i1}	a_{i2}	b_{i2}			1 x_{i1}	2 x_{i2}	3 x_{i3}	4 x_{i4}	5 x_{i5}	
1	800	400	420	350	390		37,7	420	380				
2	510	250	270	240	260		23,3	270	240				
3	600	450	480	100	140		50,3	480	120				
4	800	600	650	120	200		27,3			650	150		
5	1100	550	580	500	550		32,6			650	520		
6	670	300	350	300	350		47,1	350	320				
7	1200	500	540	600	670		45,2		540	660			
8	1300	400	430	800	900		45,9			430	870		
9	1200	500	540	600	700		26,2					540	660
10	1400	600	630	730	780		35,1				630	770	
11	1400	600	640	700	790		27,9					640	760
Всего по расчету								1520	1600	2320	2170	1950	1420

K^q_{it} — капитальные вложения, выделяемые i-му объекту в t-м году согласно q-му варианту;

s^q_{it} — объем строительно-монтажных работ на i-м объекте в t-м году согласно q-му варианту;

N^q_{it} — мощности, вводимые на i-м объекте в t-м году согласно q-му варианту;

f_{iq} — основные фонды или получаемая прибыль на i-м объекте после осуществления q-го варианта развития объекта;

K_t — лимит капитальных вложений в t-м году;

S_t — лимит объемов строительно-монтажных работ в t-м году;

N_t — план по вводу мощностей в t-м году;

x_{iq} — переменная, равная 1, если на i-м объекте принят q-й вариант, и равная 0 в противном случае.

Математическая модель. Найти максимум ввода основных фондов или прибыли

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{m_i} f_{iq} x_{iq} \to \max$$

при ограничениях: на лимит капитальных вложений

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{m_i} k^q_{it} x_{iq} \leqslant K_t \quad (t = 1, 2, \dots T),$$

на объемы строительно-монтажных работ

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{m_i} s^q_{it} x_{iq} \leqslant S_t \quad (t = 1, 2, \dots, T),$$

на ввод мощностей

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{m_i} N_{it}^{q} x_{iq} \geqslant N_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

на выбор единого варианта по каждому объекту

$$\sum_{q=1}^{m_i} x_{iq} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ КАПИТАЛЬНОГО СТРОИТЕЛЬСТВА ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ СУММАРНЫХ ЛИМИТОВ

Определить оптимальную последовательность строительства объектов с учетом ограниченности накопленных лимитов капитальных вложений, объемов строительно-монтажных работ и мощностей (строительство объектов идет согласно нормам продолжительности).

Введем обозначения:

i — номер объекта строительства;
n — число всех объектов строительства;
t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
j — порядковый год строительства объекта, начиная с 1-го года строительства (не обязательно 1-го года планового периода);
P_{it} — прибыль, получаемая на объекте за несколько лет функционирования объекта после его окончания, если его строительство начато в t-м году планового периода;
k_{ij} — капиталовложения, выделяемые i-му объекту в j-м году его строительства;
s_{ij} — объем строительно-монтажных работ, выделяемых i-му объекту в j-м году его строительства;
N_{ij} — мощности, вводимые на i-м объекте в j-м году его строительства;
K_t — лимит капиталовложений за t первых лет планового периода;
S_t — накопленный лимит объемов строительно-монтажных работ за t первых лет;
N_t — накопленный план ввода мощностей за t первых лет;
x_{it} — переменная, равная 1, если i-й объект начинают строить в t-м году, и равная 0 в противном случае.

Математическая модель. Найти максимум суммарной прибыли

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} P_{it} x_{it} \to \max$$

при ограничениях: на лимит капитальных вложений

$$\sum_{i=1}^{n} k_{i1} x_{i1} \leqslant K_1, \sum_{i=1}^{n} [x_{i1}(k_{i1} + k_{i2}) + k_{i1} x_{i2}] \leqslant K_2, \ldots,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [x_{i1} \sum_{j=1}^{T} k_{ij} + x_{i2} \sum_{j=1}^{T-1} k_{ij} + \cdots + x_{iT} k_{i1}] \leqslant K_T,$$

на объемы строительно-монтажных работ

$$\sum_{i=1}^{n} s_{i1} x_{i1} \leqslant S_1, \quad \sum_{i=1}^{n} [x_{i1}(s_{i1}+s_{i2})+s_{i1} x_{i2}] \leqslant S_2, \ldots,$$

$$\sum_{i=1}^{n} [x_{i1} \sum_{j=1}^{T} s_{ij} + x_{i2} \sum_{j=1}^{T-1} s_{ij} + \cdots + x_{iT} s_{i1}] \leqslant S_T,$$

на ввод мощностей

$$\sum_{i=1}^{n} N_{i1} x_{i1} \geqslant N_1, \ \sum_{i=1}^{n} [x_{i1}(N_{i1}+N_{i2})+x_{i2} N_{i1}] \geqslant N_2, \ldots$$

$$\ldots, \sum_{i=1}^{n} \left[x_{i1} \sum_{j=1}^{T} N_{ij} + x_{i2} \sum_{j=1}^{T-1} N_{ij} + \cdots + x_{iT} N_{i1}\right] \geqslant N_T,$$

на выбор единого варианта на каждом объекте

$$\sum_{q=1}^{m_i} x_{iq} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Это задача целочисленного программирования.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ОТРАСЛЕЙ

Определить оптимальное распределение капитальных вложений по объектам строительства нескольких отраслей и распределения объемов строительно-монтажных работ по районам размещения объектов и строительных трестов.

Введем обозначения:

i — номер отрасли;
m — число всех отраслей;
n_i — число объектов i-й отрасли;
ik — номер k-го объекта i-й отрасли;
j — номер строительно-монтажного треста или района, где этот трест проводит работы;
n — число всех трестов;
t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
r — номер вида мощностей;
T_{ik} — время строительства k-го объекта i-й отрасли;
K_{it} — лимит капитальных вложений i-й отрасли в t-м году;
S_{it} — лимит объемов строительно-монтажных работ в i-й отрасли в t-м году;
R_{ik} — остаток сметной стоимости k-го объекта i-й отрасли;
Q_{ik} — остаток объема строительно-монтажных работ k-го объекта i-й отрасли;
N_{it}^r — мощности i-й отрасли r-го типа, которые надо ввести в t-м году;
C_{ik}^r — коэффициент ввода мощностей r-го типа на единицу капиталовложений на k-м объекте i-й отрасли;
d_{ik} — коэффициент объемов строительно-монтажных работ на единицу капиталовложений k-го объекта i-й отрасли;
P_{ik} — приоритет k-го объекта i-й отрасли;
f_{ik} — запланированные фонды на k-м объекте i-й отрасли, которые осталось ввести до окончания строительства объекта;

A_{jt} — условная мощность j-го треста в t-м году (объем строительно-монтажных работ, которые трест может выполнить);

a_{ik}^t — нижняя граница для капиталовложений, выделяемых k-му объекту i-й отрасли в t-м году;

b_{ik}^t — верхняя граница капиталовложений, выделяемых k-му объекту i-й отрасли в t-м году;

M_j — множество объектов k, для которых j-й трест является подрядчиком;

x_{ik}^t — объем капиталовложений, выделяемых k-му объекту i-й отрасли в t-м году.

Математическая модель. Найти максимум ввода основных фондов

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\sum_{t=1}^{T_{ik}} \frac{P_{ik} f_{ik} x_{ik}^t}{R_{ik}} \to \max$$

при ограничениях: на лимиты капиталовложений

$$\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}^t \leqslant K_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на сметную стоимость объектов

$$\sum_{t=1}^{T_{ik}} x_{ik}^t \leqslant R_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n_i),$$

на ввод мощностей

$$\sum_{k=1}^{n_i} C_{ik}^r x_{ik}^t \geqslant N_{it}^r \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на лимит строительно-монтажных работ

$$\sum_{k=1}^{n_i} d_{ik} x_{ik}^t \leqslant S_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

на объемы строительно-монтажных работ объектов

$$\sum_{t=1}^{T_{ik}} d_{ik} x_{ik}^t \leqslant Q_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n_i),$$

на возможности строительных трестов

$$\sum_{ik \in M_j} d_{ik} x_{ik}^t \leqslant A_{jt} \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

на выделяемые капитальные вложения

$$a_{ik}^t \leqslant x_{ik}^t \leqslant b_{ik}^t \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n_i;\ t = 1, 2, \ldots, T).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВА И КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ОТРАСЛИ

Необходимо найти производственные мощности и объемы перевозок продукции при ограниченных лимитах капитальных вложений в целом по отрасли.

Введем обозначения:

i — номер предприятия;
m — число всех предприятий;
j — номер вида продукции;
l — число всех видов продукции;
r — номер потребителя;
n — число всех потребителей;
q — номер варианта развития предприятия;
Q — число всех вариантов развития предприятий;
t — номер года планового периода;
T — число лет планового периода;
A_{jrt} — потребность r-го потребителя в j-й продукции в t-м году;
N_{ijqt} — мощность i-го предприятия по выпуску j-й продукции в t-м году согласно q-му варианту развития предприятия;
K_{ijqt} — норматив капиталовложений на единицу продукции j-го вида на i-м предприятии в t-м году согласно q-му варианту развития;
K — лимит капитальных вложений в целом по отрасли;
Q_{ijqt} — производственные затраты на единицу продукции j-го вида на i-м предприятии в t-м году согласно q-му варианту развития;
C_{jirt} — затраты на перевозку единицы продукции j-го вида из i-го пункта производства r-му потребителю в t-м году;
x_{iq} — искомая величина, равная 1, если на i-м предприятии принимается q-й вариант развития, и равная 0 в противном случае;
x_{jirt} — искомый объем перевозок j-й продукции в t-м году из i-го предприятия r-му потребителю;

Математическая модель. Найти лимит общих затрат

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{T} N_{ijqt}\,Q_{ijqt}\,x_{iq}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{T} C_{jirt}\,x_{jirt}\to \min$$

при ограничениях: на потребности в продукции

$$\sum_{i=1}^{m} x_{jirt}=A_{jrt} \quad (j=1,2,\ldots,l;\ r=1,2,\ldots,n;\ t=1,2,\ldots,T),$$

на мощности предприятий

$$\sum_{r=1}^{n} x_{jirt}\leqslant\sum_{q=1}^{Q} N_{ijqt}\,x_{iq}\,(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,l;\ t=1,2,\ldots,T),$$

на капитальные вложения

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{q=1}^{Q}\sum_{t=1}^{T} K_{ijqt}\,N_{ijqt}\,x_{iq}\leqslant K,$$

на выбор варианта

$$\sum_{q=1}^{Q} x_{iq}\leqslant 1 \quad (i=1,2,\ldots,m),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{jirt} \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, l;\ i = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots, T).$$

Это задача смешанного типа (вариантная задача размещения).

МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ НА РАЗВИТИЕ ПРОИЗВОДСТВА ОБЪЕДИНЕНИЯ

Необходимо обеспечить производственные мощности и основные фонды для выполнения планов по темпам и пропорциям развития объединения и его звеньев. Эта основная задача связана с оптимизацией планирования капитальных вложений. С этой целью разрабатывают следующие модели.

МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ПО ВАРИАНТАМ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

Необходимо определить оптимальные варианты развития предприятий объединения при ограниченных капитальных вложениях.

Введем обозначения:

i — номер предприятия данного объединения;
n — число всех предприятий данного объединения;
q — номер варианта развития предприятий;
Q — число всех вариантов развития предприятий;
j — вид продукции;
l — число различных видов продукции;
t — номер года планового периода;
T — число лет планового периода;
r — сорт производимой продукции (полуфабрикатов);
R — число допустимых сортов производимой продукции (полуфабрикатов);
f_{iq} — значение критерия, принятого для оценки эффективности (прибыль, затраты и т. д.) i-го предприятия согласно q-му варианту развития;
N_{ijqt} — мощность производства j-й продукции на i-м предприятии согласно q-му варианту в t-м году;
A_{jt} — плановое задание по производству j-й продукции в t-м году;
H_j — стоимость единицы продукции j-го вида;
M^r_{ijqt} — показатель выхода продукции r-го сорта на i-м предприятии по выпуску j-й продукции в t-м году согласно q-му варианту развития;
A_{jrt} — план по производству продукции j-го вида r-го сорта в t-м году;
P_t — плановый показатель производительности труда в целом по объединению в t-м году;
B_t — фонд заработной платы в t-м году по объединению;
g_t — коэффициент соотношения темпов роста производительности труда и заработной платы объединения в t-м году;
C_{iqt} — число рабочих на i-м предприятии объединения в t-м году согласно q-му варианту развития;
D_{jrt} — допустимые отклонения от плана по выпуску j-й продукции r-го сорта в t-м году;
x_{ijqt} — объем производства продукции j-го вида на i-м предприятии в t-м году согласно q-го варианта развития;

h_{iqt} — заработная плата рабочих на i-м предприятии в t-м году согласно q-му варианту развития;

K_{iqt} — объем капитальных вложений, необходимых на i-м предприятии в t-м году согласно q-му варианту развития;

K_t — лимит капитальных вложений, выделенных на развитие обьединения;

x_{iq} — искомая переменная, равная 1, если на i-м предприятии выбирается q-й вариант развития, и равная 0 в противном случае.

Модель вариантной задачи планирования капиталовложений объединения. Найти экстремум (максимум или минимум в зависимости от вида критерия) эффективности

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{Q} f_{iq} x_{iq} \to \text{extr}$$

при ограничениях: на выбор варианта

$$\sum_{q=1}^{Q} x_{iq} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

по общему производству продукции

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{Q} N_{ijqt} x_{iq} \geqslant A_{jt} \quad (j = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

по лимиту капитальных вложений

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{Q} K_{iqt} x_{iq} \leqslant K_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

по производительности труда

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} H_j N_{ijqt} x_{iq} \geqslant P_t \sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{Q} C_{iqt} x_{iq} \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

по фонду заработной платы

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{Q} C_{iqt} h_{iqt} x_{iq} \leqslant B_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

по сортности выпускаемой продукции

$$A_{jrt} - D_{irt} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{Q} M_{ijqt} N_{ijqt} x_{iq} \leqslant A_{jrt} + D_{jrt}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, l;\ r = 1, 2, \ldots, R;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

по темпам роста производительности труда по отношению к заработной плате

$$\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \geqslant g_t \frac{B_{t+1} - B_t}{B_t} \quad (t = 1, 2, \ldots, T).$$

Это задача целочисленного программирования.

Модель смешанной задачи планирования капитальных вложений. Найти экстремум эффективности

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q} f_{iq} x_{iq} \to \text{extr}$$

при ограничениях: на выбор варианта

$$\sum_{q=1}^{Q} x_{iq} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

на выбор мощности

$$x_{ijqt} \leqslant x_{iq} N_{ijqt} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, l;\ q = 1, 2, \ldots, Q;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

по общему производству продукции

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q} x_{ijqt} \geqslant A_{jt} \quad (j = 1, 2, \ldots, l;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

по лимиту капитальных вложений

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q} K_{iqt} x_{iq} \leqslant K_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

по производительности труда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\sum_{q=1}^{Q} H_j x_{ijqt} \geqslant P_t \sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q} C_{iqt} x_{iq} \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

по фонду заработной платы

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q} C_{iqt} h_{iqt} x_{iq} \leqslant B_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

по сортности выпускаемой продукции

$$A_{jrt} - D_{jrt} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{Q} M^{r}_{ijqt} x_{ijqt} \leqslant A_{jrt} + D_{jrt}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, l;\ r = 1, 2, \ldots, R;\ t = 1, 2, \ldots, T),$$

по темпам роста производительности труда по отношению к заработной плате

$$\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \geqslant g_t \frac{B_{t+1} - B_t}{B_t} \quad (t = 1, 2, \ldots, T).$$

МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ПО ВАРИАНТАМ РАЗВИТИЯ ОБЪЕКТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ (НА ПРИМЕРЕ ДОБЫЧИ УГЛЯ)

Представим технологическую схему шахты в виде последовательных звеньев, содержащих объекты с ограниченной пропускной способностью. Для каждого объекта формируют свой вариант развития и выбирают оптимальный вариант согласно принятому критерию:

Введем обозначения:

p — номер объекта технологического звена;
m — число технологических звеньев шахты;
j — номер технологического звена;
q_j — число объектов на j-м технологическом звене;
v — номер варианта развития объекта;
w_p — число вариантов развития объекта;
t — период времени;
T — число всех периодов времени;
s — вид ресурса;
Q — число всех видов ресурсов;
x^q_{jpvt} — поток угля, выходящий из j-го звена при v-м варианте развития объекта и поступающего в q-й объект $(j+1)$-го звена в t-й период времени;
x^q_{jpvt} — поток полезного ископаемого, выходящий в t-й период времени при v-м варианте развития объекта из p-го забоя на q-й объект 2-го звена;
D_t — плановое задание по объему добычи угля на t-й период времени по шахте;
K^s_{jpvt} — потребность в s-м ресурсе на p-м объекте j-го звена в t-й период времени согласно v-му варианту развития;
K^s_t — лимит s-го вида ресурса в t-й период времени;
R — число рабочих по добыче угля на шахте на начало планового периода;
r_{jpvt} — отклонение численности рабочих по добыче угля от первоначальной при осуществлении v-го варианта развития на p-м объекте j-го звена в t-й период времени;
P_t — плановое задание на t-й период времени по производительности труда рабочих в целом по шахте;
G^j_q — множество объектов j-го звена, поставляющих уголь q-му объекту $(j+1)$-го звена;
d_{jpvt} — максимально возможная пропускная способность при v-м варианте развития p-го объекта j-го звена в t-й период времени;
y_{jpv} — переменная, равная 1, если для p-го объекта j-го звена выбран v-й вариант развития, и равная 0 в противном случае;
$f_{jpvt}(x_{jpvt} y_{jpv})$ — значение показателя, принятого в качестве критерия при осуществлении v-го варианта на p-м объекте j-го звена в t-й момент времени.

Математическая модель. Найти экстремум общего значения критерия

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{Q_t}\sum_{v=1}^{w_p} f_{jpvt}(x_{jpvt}, y_{jpv}) \to \text{extr}$$

при ограничениях: на добычу полезного ископаемого

$$\sum_{p=1}^{qj}\sum_{v=1}^{w_p} x^q_{1pvt} \geqslant D_t \ (t=1, 2, \ldots, T),$$

на выделяемые ресурсы

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{q_j}\sum_{v=1}^{w_p} K^s_{jpvt}\, y_{jpv} \leqslant K^s_t \quad (t = 1, 2, \ldots, T;\ s = 1, 2, \ldots, Q),$$

на производительность труда

$$\sum_{p=1}^{q_1}\sum_{v=1}^{w_p} x^q_{1pvt} \geqslant 12\, P_t \left(R + \sum_{j=1}^{m}\sum_{p=1}^{q_1}\sum_{v=1}^{w_p} r_{jpvt}\, y_{jpv}\right) \quad (t = 1, 2, \ldots, T),$$

на пропускную способность

$$\sum_{p \in G^j_q} x^q_{jpvt} \leqslant d_{(j+1)\,qvt}\, y_{(j+1)\,qv} \quad (j = 1, 2, \ldots, m-1;\ v = 1, 2, \ldots, q_j);$$

$$x^q_{jpvt} \leqslant d_{jpvt}\, y_{jpv} \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots, q;\ v = 1, 2, \ldots, w_p),$$

на выбор варианта

$$\sum_{v=1}^{w_p} y_{jpv} \leqslant 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots, q;\ v = 1, 2, \ldots, w_p),$$

на неотрицательность переменных

$$x^q_{jpvt} \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots, q;\ v = 1, 2, \ldots, w_p;\ t = 1, 2, \ldots, T).$$

Разработанные экономико-математические модели отраслевого планирования применяют на практике главным образом при получении оптимальных планов развития отрасли. Частично их используют при выработке управленческих решений. Основные трудности при использовании этих моделей заключаются в подготовке научно обоснованной информации и в создании математического обеспечения на ЭВМ для решения оптимизационных задач. В тех отраслях, где имеется математическое обеспечение и организована подготовка надежной информации, применение на практике разработанных моделей дает возможность получить решение, улучшающее показатель критерия на 10—15 % Пути совершенствования отраслевого планирования с помощью ЭВМ состоят главным образом в создании информационных служб по своевременной подготовке и передаче научно обоснованной информации, разработке лучших экономико-математических моделей и методов,создании системного математического обеспечения, подготовке высококвалифицированных кадров по решению оптимизационных задач.

Глава 4

МОДЕЛИ ЗАДАЧ ДЛЯ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА НА УРОВНЕ ОТРАСЛИ

Многие модели промышленного производства, а также модели сельскохозяйственных предприятий можно использовать и как отраслевые модели для сельского хозяйства. Отметим некоторые модели, имеющие особенности.

МОДЕЛЬ СПЕЦИАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ

Сельскохозяйственную продукцию производят в нескольких зонах, необходимо определить объем производства продукции в каждой зоне при минимальных затратах.

Введем обозначения:

k — номер зоны;
r — число всех зон;
j — вид продукции;
l — число всех видов продукции;
s — номер вида ресурсов;
m — число всех видов ресурсов;
Q_j — необходимый объем производства j-й продукции;
b_{sk} — объем лимитирующего s-го вида ресурсов в k-й зоне;
C_{jk} — стоимость производства j-й продукции в k-й зоне;
a_{sjk} — норма затрат s-го вида ресурса для производства единицы продукции j-го вида в k-й зоне.
x_{jk} — объем производства j-й процукции в k-й зоне.

Математическая модель. Найти минимум затрат на производство всех видов продукции

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{r} C_{jk} x_{jk} \to \min$$

при ограничениях: на лимитирующие ресурсы

$$\sum_{j=1}^{l} a_{sjk} x_{jk} \leqslant b_{sk} \quad (s = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, r),$$

на объем производства

$$\sum_{k=1}^{r} x_{jk} \geqslant Q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{jk} \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, l; \quad k = 1, 2, \ldots, r).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПЛОЩАДЕЙ

Определить оптимальный объем производства сельскохозяйственной продукции на выделенных участках земли при минимальных затратах или при наибольшей прибыли.

Введем обозначения;:

k — номер участка земли;
r — число всех участков земли;
j — вид продукции;
l — число всех видов производимой продукции;
Q_j — необходимый объем производства продукции j-го вида;
b_k — площадь k-го участка земли;
C_{jk} — стоимость производства едииицы продукции j-го вида на k-м участке земли;

P_{jk} — прибыль, получаемая при производстве единицы продукции j-го вида на k-м участке земли;
a_{jk} — часть k-го участка земли, необходимого для производства единицы продукции j-го вида на k-м участке земли (величина, обратная урожайности);
v_j — двойственная оценка j-й продукции;
u_k — двойственная оценка k-го участка земли;
x_{jk} — объем производства j-й продукции на k-м участке земли.

Математическая модель. Найти минимум затрат от производства всех видов сельскохозяйственной продукции.

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{r} C_{jk} x_{jk} \to \min$$

при ограничениях: на объем производства продукции

$$\sum_{k=1}^{r} x_{jk} = Q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

на выделенные площади

$$\sum_{j=1}^{l} a_{jk} x_{jk} \leqslant b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{jk} \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, l; \quad k = 1, 2, \ldots, r).$$

Двойственная задача для получения двойственных оценок

$$\sum_{j=1}^{l} Q_j v_j - \sum_{k=1}^{r} b_k u_k \to \max$$

при ограничениях $v_j - a_{jk} u_k \leqslant C_{jk}$ $(k = 1, 2, \ldots, r, \quad j = 1, 2, \ldots, l;$ $u_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$.
Решая эту задачу, получаем оптимальную оценку продукции, выраженную через оптимальную оценку земли $v_j = C_{jk} + a_{jk} u_k$. Модель на максимум прибыли: найти максимум прибыли от производства всей сельскохозяйственной продукции

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{r} P_{jk} x_{jk} \to \max$$

при ограничениях: на объем производства

$$\sum_{k=1}^{r} x_{jk} \geqslant Q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

на выделенные площади

$$\sum_{j=1}^{l} a_{jk} x_{jk} \leqslant b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{jk} \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, l; \quad k = 1, 2, \ldots, r).$$

МОДЕЛИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ

Почти все модели размещения для промышленного производства можно использовать и для размещения сельского хозяйства с учетом той особенности, что производство сельскохозяйственной продукции производится по зонам.

Линейная статическая модель размещения. В сельском хозяйстве для производства всех видов продукции используют производственные ресурсы (земля, техника и т. д.), отрасли взаимосвязаны, выделены зоны производства продукции и зоны потребления продукции. Необходимо определить объем производства продукции в каждой зоне и транспортные потоки.

Введем обозначения:

j — вид сельскохозяйственной продукции;
l — число всех видов сельскохозяйственной продукции;
k — номер зоны (района), где производится продукция;
r — число всех зон производства продукции;
i — номер зоны потребления продукции;
n — число всех зон потребления продукции;
D_{ji} — объем потребления j-й продукции в i-й зоне;
N_{kj} — максимально возможный объем производства продукции j-го вида в k-й зоне;
C_{jk} — стоимость производства единицы продукции j-го вида в k-й зоне;
C_{jki} — стоимость перевозки единицы продукции j-го вида из k-й зоны производства в i-ю зону потребления;
x_{jk} — объем производства продукции j-го вида в k-й зоне;
x_{jki} — объем перевозки j-й продукции из k-й зоны в i-ю.

Математическая модель. Найти минимум затрат на производство и транспортировку продукции

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{r} C_{jk}x_{jk}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} C_{jki}x_{jki}\to \min$$

при ограничениях: на производство продукции

$$x_{jk}=\sum_{i=1}^{n} x_{jki}\leqslant N_{kj}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

на потребление продукции

$$\sum_{k=1}^{r} x_{jki}=D_{ji}\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{jk}\geqslant 0;\quad x_{jki}\geqslant 0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ АГРАРНО-ПРОМЫШЛЕННЫХ СВЯЗЕЙ ПРИ РАЗМЕЩЕНИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОИЗВОДСТВА

Определить оптимальные аграрно-промышленные связи и выделить сырьевые зоны для перерабатывающих предприятий.

Введем обозначения:

s — вид ресурса;
Q — число всех видов ресурсов;
k — район (зона);
m — число всех районов (зон);
j — вид сельскохозяйственной продукции;
l — число всех видов производимой продукции;
i — предприятие, перерабатывающее сельскохозяйственную продукцию;
n — число всех видов предприятий, перерабатывающих продукцию сельского хозяйства;
C_{jk} — затраты на производство единицы продукции j-го вида в k-м районе;
C_{jki} — стоимость перевозки единицы продукции j-го вида из k-го района на i-е предприятие;
a_{skj} — норма затрат s-го вида ресурса в k-м районе на производство единицы продукции j-го вида;
b_{sk} — выделяемый лимит ресурсов s-го вида в k-м районе;
h_{sjk} — норма выхода s-го ресурса из единицы продукции j-го вида в k-м районе;
D_{sk} — ресурсы s-го вида, поступающие в k-й район извне;
B_s — лимит ресурсов s-го вида, распределяемый в централизованном порядке;
A_j — заданный объем производства продукции j-го вида по совокупности районов;
g_{jk} — коэффициент использования единицы продукции j-й отрасли k-го района для промышленной переработки;
N_i — коэффициент использования производственных мощностей i-го предприятия;
T_i — период работы i-го предприятия;
N_{ji} — количество единиц производственной мощности i-го предприятия по производству j-й продукции;
x_{jk} — количество производимой сельскохозяйственной продукции j-го вида в k-м районе;
x_{jki} — количество сельскохозяйственной продукции j-го вида, перевозимой из k-го района для переработки на i-е предприятие.

Математическая модель. Найти минимум затрат

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} C_{jk}x_{jk} + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{jki}x_{jki} \to \min$$

при ограничениях: на ресурсы

$$\sum_{j=1}^{l} a_{skj}x_{jk} \leqslant b_{sk} \quad (s = 1, 2, \ldots, Q; \quad k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} a_{skj}x_{jk} \leqslant B_s \quad (s = 1, 2, \ldots, Q),$$

$$\sum_{j=1}^{l} a_{skj}x_{jk} - \sum_{j=1}^{l} h_{sjk}x_{jk} \leqslant D_{sk} \quad (s = 1, 2, \ldots, Q; \quad k = 1, 2, \ldots, m),$$

на производство продукции

$$\sum_{k=1}^{m} x_{jk} \geqslant A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

на мощности предприятий по переработке продукции

$$\sum_{k=1}^{m} g_{jk}x_{jk}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{jki} \leqslant \sum_{i=1}^{n} N_{ji}N_iT_i \quad (j=1, 2, \ldots, l),$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{jki} \leqslant N_{ji}N_iT_i \quad (j=1, 2, \ldots, l;\ k=1, 2, \ldots, m),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{jk} \geqslant 0,\ x_{jki} \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n;\quad j=1, 2, \ldots, l;\quad k=1, 2, \ldots, m).$$

МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

При составлении плана распределения капитальных вложений в сельском хозяйстве на первом этапе распределяют ограниченные капитальные вложения по отраслям, а затем внутри отрасли по сельскохозяйственным предприятиям. Почти все модели распределения капитальных вложений промышленных отраслей можно использовать и для сельского хозяйства.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ МЕЖДУ ОТРАСЛЯМИ

Выделенные лимиты капитальных вложений необходимо распределить между отраслями сельского хозяйства так, чтобы общие затраты на производство продукции после освоения капитальных вложений были минимальными.

Введем обозначения:

j — вид продукции сельского хозяйства;
s — вид капитальных вложений;
r — вид остальных ресурсов;
k — номер зоны;
a_{rjk} — использование ресурсов r-го вида для производства единицы продукции j-го вида в k-й зоне;
a_{sjk} — капиталоемкость единицы j-й продукции в k-й зоне по s-му виду капиталовложений;
b_{rjks} — экономия затрат r-го вида ресурса в расчете на единицу капитальных вложений s-го вида в j-ю отрасль k-й зоны;
C_{sjk} — дополнительное снижение себестоимости в расчете на единицу капитальных вложений s-го вида в j-ю отрасль k-й зоны;
b_s — объем выделенных капитальных вложений s-го вида;
b_{rk} — объем выделенных ресурсов r-го вида для k-й зоны;
x_{sjk} — искомый объем капитальных вложений s-го вида в j-ю отрасль k-й зоны на расширение, реконструкцию и новое строительство;
x_{jk} — искомый объем производимой продукции j-го вида по k-й зоне;
C_{jk} — стоимость производства единицы продукции j-го вида в k-й зоне;
Q_j — объем производимой продукции j-го вида.

Математическая модель. Найти минимум себестоимости

$$\sum_j \sum_k C_{jk}x_{jk} - \sum_k \sum_j \sum_s C_{sjk}x_{sjk} \to \min$$

при ограничениях: на выделяемые ресурсы по зонам

$$\sum_j a_{rjk}x_{jk} - \sum_j \sum_s b_{rjks}x_{jks} \leqslant b_{rk},$$

на объем производимой продукции

$$\sum_k x_{jk} \geqslant Q_j,$$

на выделяемые капитальные вложения

$$x_{jks} \leqslant a_{sjk} x_{jk},$$

на распределяемые капитальные вложения

$$\sum_j \sum_k x_{jks} \leqslant b_s,$$

на реальность плана

$$x_{jk} \geqslant 0; \quad x_{jks} \geqslant 0.$$

Модель представлена в виде задачи линейного программирования. Решение ее дает объем производства x_{jk} по зонам и распределение капитальных вложений x_{jks}.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ВНУТРИ ОТРАСЛИ ПО СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫМ ПРЕДПРИЯТИЯМ

Выделенные капитальные вложения для отрасли следует оптимально распределить по сельскохозяйственным производствам с учетом зон по производству продукции.

Введем обозначения:

m — номер объекта строительства сельскохозяйственного предприятия;
n — число всех сельскохозяйственных предприятий;
t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
k — зона по производству продукции;
r — число всех зон;
j — вид производимой продукции в зонах;
s — вид капитальных вложений;
Q — число всех видов капитальных вложений;
P_{mjsk} — годовая прибыль m-го хозяйства в k-й зоне по производству j-го вида продукции за счет освоения s-го вида капиталовложений;
R_{mjk} — сметная стоимость m-го объекта строительства k-й зоны по производству j-й продукции;
N_{mjk} — ввод мощностей по производству j-й продукции на m-м предприятии k-й зоны на один рубль капиталовложений;
a_{mjkst} — нижняя граница выделенных капитальных вложений s-го вида на m-е предприятие k-й зоны для производства j-й продукции в t-м году;
b_{mjkst} — верхняя граница выделяемых капитальных вложений s-го вида на m-е предприятие k-й зоны для производства j-й продукции в t-м году;
T_{mjk} — наиболее возможный срок строительства объекта m-го предприятия k-й зоны по производству j-й продукции;
A_{jk} — наименьший объем производства j-й продукции в k-й зоне;
B_{jks} — лимит выделенных капитальных вложений s-го вида для производства продукции j-го вида в k-й зоне;

F_j — нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений в j-й отрасли;

x_{mjkst} — объем выделенных капитальных вложений s-го вида m-му предприятию k-й зоны в t-м году для производства продукции j-го вида.

Математическая модель. Найти максимум взвешенной прибыли

$$P = \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{s=1}^{Q} \sum_{k=1}^{r} \sum_{t=1}^{T_{mjk}} \frac{P_{mjsk} x_{mjskt}}{R_{mjk} (1 + F_j)^t} \to \max$$

при ограничениях: на сроки строительства

$$T_{mjk} \leqslant T \quad (m = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, l; \; k = 1, 2, \ldots, r),$$

на использование капитальных вложений в пределах сметы

$$\sum_{s=1}^{Q} \sum_{t=1}^{T_{mjk}} x_{mjskt} \leqslant R_{mjk} \quad (m = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, l; \; k = 1, 2, \ldots, r),$$

на ввод мощностей

$$\sum_{m=1}^{n} N_{mjk} \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{Q} x_{mjskt} \geqslant A_{jk} \quad (j = 1, 2, \ldots, l; \quad k = 1, 2, \ldots, r),$$

на выделенные лимиты капитальных вложений

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} x_{mjskt} \leqslant B_{jks} \quad (j = 1, 2, \ldots, l; \; k = 1, 2, \ldots, r; \; s = 1, 2, \ldots, Q),$$

на размеры капитальных вложений

$$a_{mjskt} \leqslant x_{mjskt} \leqslant b_{mjskt}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, l; \quad s = 1, 2, \ldots, Q; \quad k = 1, 2, \ldots, r; \quad t = 1, 2, \ldots, T).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИНЕРАЛЬНЫХ УДОБРЕНИЙ

Необходимо использовать с максимальной эффективностью выделенные минеральные удобрения при производстве различной сельскохозяйственной продукции по зонам.

Введем обозначения:

h — вид удобрений;

H — число всех видов удобрений;

j — вид производимой сельскохозяйственной продукции (выращиваемой культуры);

l — число всех видов сельскохозяйственной продукции;

k — зона;

r — число всех зон;

i — пункт производства удобрений;

n — число всех пунктов производства удобрений;

C_{jk} — прибыль, полученная от реализации единицы добавочной продукции j-го вида в k-й зоне за счет внесения удобрений;

a_{hjk} — норма внесения h-го вида удобрения в k-й зоне для прибавки урожая j-й культуры на единицу;

Q_{jk} — максимально возможная прибавка урожая j-й культуры в k-й зоне за счет внесения удобрений;

b_h — количество имеющихся удобрений h-го вида;

N_{hl} — количество h-го вида удобрения, имеющегося на l-м пункте;

C_{hlk} — стоимость перевозки единицы удобрений h-го вида из l-го пункта производства в k-ю зону потребления удобрений;

b_{hk} — максимально возможное количество удобрений h-го вида, которое можно вносить в k-й зоне;

x_{jk} — прибавка урожая j-й культуры в k-й зоне за счет внесения удобрений;

x_{hlk} — объем удобрений h-го вида, перевозимых из l-го пункта в k-ю зону потребления.

Математическая модель. Найти максимальную прибыль от производства дополнительной продукции за счет производства минеральных удобрений

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{r} C_{jk}x_{jk}-\sum_{h=1}^{H}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} C_{hlk}x_{hlk}\to \max$$

при ограничениях: на имеющиеся виды удобрений

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{r} a_{hlk}x_{jk}\leqslant b_h \quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ H),$$

на вводимое количество минеральных удобрений в каждой зоне

$$\sum_{j=1}^{l} a_{hlk}x_{jk}=\sum_{l=1}^{n} x_{hlk} \quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ H;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

на возможный вывоз минеральных удобрений

$$\sum_{k=1}^{r} x_{hlk}\leqslant N_{hl} \quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ H;\quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

на количество выделенных минеральных удобрений по зонам

$$\sum_{l=1}^{n} x_{hlk}\leqslant b_{hk} \quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ H;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

на возможную прибавку урожая

$$0\leqslant x_{jk}\leqslant Q_{jk} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛАНОВЫХ ФОНДОВ МИНЕРАЛЬНЫХ УДОБРЕНИЙ

Распределить плановые фонды минеральных удобрений по предприятиям (зонам) с максимальной эффективностью.

Введем обозначения:

j — вид сельскохозяйственной культуры;

l — число всех видов сельскохозяйственных культур;

q — способ внесения удобрений;

Q — число всех способов внесения удобрений;

i — вид смеси удобрения;

n — число всех видов смесей;

k — номер зоны;

r — число всех зон;

N — количество действующего вещества азота, содержащегося в плановом фонде удобрения;

P — количество действующего вещества фосфора, содержащегося в плановом фонде удобрения;

K — количество действующего вещества калия, содержащегося в плановом фонде удобрения;

N_{ijqk} — количество действующего вещества азота, входящего в i-ю смесь, которая вносится на 1 га земли q-м способом под j-ю культуру в k-й зоне;

P_{ijqk} — количество действующего вещества фосфора, входящего в i-ю смесь, которая вносится на 1 га земли q-м способом под j-ю культуру в k-й зоне;

K_{ijqk} — количество действующего вещества калия, входящего в i-ю смесь, которая вносится на 1 га земли q-м способом под j-ю культуру в k-й зоне;

S_{jkq} — площадь k-й зоны, отводимой под j-ю культуру, где удобрение должно было внесено q-м способом;

a_{ijqk} — коэффициент, равный 1, если i-я смесь вносится под j-ю культуру q-м способом на площади k-й зоны, и равный 0 в противном случае;

C_{ijqk} — стоимость прибавки урожая j-й культуры на 1 га земли k-й зоны, получаемая от внесения удобрений i-й смеси q-м способом;

x_{ijqk} — площадь k-й зоны, отводимая под j-ю культуру при q-м способе внесения удобрения i-й смеси.

Математическая модель. Найти максимум стоимости от прибавки урожая за счет внесения минеральных удобрений

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{k=1}^{r} C_{ijqk} x_{ijqk} \to \max$$

при ограничениях: на количество минеральных удобрений

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{k=1}^{r} N_{ijqk} x_{ijqk} \leqslant N,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{k=1}^{r} P_{ijqk} x_{ijqk} \leqslant P,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{k=1}^{r} K_{ijqk} x_{ijqk} \leqslant K,$$

на имеющиеся площади

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijqk} x_{ijqk} \leqslant S_{jkq} \quad (j = 1, 2, \ldots, l; \quad k = 1, 2, \ldots, r; \quad q = 1, 2, \ldots, Q),$$

на неотрицательность переменных

$$x_{ijqk} \geqslant 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n; \ j = 1, 2, \ldots, l; \ k = 1, 2, \ldots, r; \ q = 1, 2 \ldots Q).$$

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАКУПОК СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ В ПРЕДЕЛАХ ЗОНЫ (ПРИ НЕБОЛЬШИХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАТРАТАХ НА ПЕРЕВОЗКУ ПРОДУКЦИИ)

Требуется наиболее эффективно разместить закупки сельскохозяйственной продукции по сельскохозяйственным предприятиям (без учета транспортных затрат на перевозку продукции).

Введем обозначения:

m — номер сельскохозяйственного предприятия;
n — число всех сельскохозяйственных предприятий;
j — вид сельскохозяйственной продукции;
l — число всех видов сельскохозяйственной продукции;
s — вид ресурса;
Q — число всех видов ресурсов;
B_{jm} — объем реальной товарной продукции j-го вида, производимой на m-м предприятии;
A_{jm} — разность вероятного и реального объема производства товарной продукции j-го вида на m-м предприятии;
C_{jm} — затраты на производство единицы товарной продукции j-го вида на m-м предприятии;
D_{jm} — затраты на производство единицы дополнительной продукции j-го вида на m-м предприятии;
D_m — минимальные затраты на m-м предприятии на производство сельскохозяйственной продукции, которые должны быть покрыты за счет выплат по государственным закупкам;
R_{jm} — закупочная цена единицы продукции j-го вида на m-м предприятии;
P_{jm} — закупочная цена единицы продукции j-го вида на m-м предприятии, уменьшенная на размер чистого дохода, поступившего государству от реализации производственных ресурсов в расчете на единицу дополнительной продукции;
a_{sjm} — норма затрат s-го вида ресурсов на m-м предприятии при производстве единицы продукции j-го вида;
G_s — объем ресурсов s-го вида (разность между общим объемом и постоянно выделяемым количеством за истекший плановый период);
B_i — объем продукции i-го вида, который должен поступить государству в соответствии с твердым планом закупок;
q_m — коэффициент выравнивания условий производства для m-го предприятия;
H_{jm} — доход (прибыль) от реального производства единицы товарной продукции j-го вида на m-м предприятии;
K — общий объем государственных выплат;
G'_s — объем дополнительных ресурсов s-го вида, выделенных на производство продукции сверх планируемого реального производства;
B'_j — объем товарной продукции j-го вида, который должен поступить государству с учетом сверхплановой продукции;
x_{jm} — объем товарной продукции j-го вида, заготовляемой в m-м предприятии из объемов, равных разности вероятного и реального товарного производства;
y_{jm} — объем товарной продукции j-го вида, заготавливаемой на m-м предприятии из объемов, соответствующих реальному производству продукции.

Модель оптимизации сельскохозяйственных закупок по критерию минимума затрат состоит в нахождении минимума затрат

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{m=1}^{n} (G_{jm} y_{jm} + D_{jm} x_{jm}) \to \min$$

при ограничениях: на выполнение плана закупок

$$\sum_{m=1}^{n} (x_{jm} + y_{jm}) \geq B_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

на выделяемые ресурсы

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} a_{sjm} y_{jm} \leq G_s \quad (s = 1, 2, \ldots, Q),$$

на производство продукции

$$0 \leq x_{jm} \leq B_{jm}; \quad 0 \leq y_{jm} \leq A_{jm} \quad (j = 1, 2, \ldots, l; \quad m = 1, 2, \ldots, n),$$

на необходимое воспроизводство

$$\sum_{j=1}^{l} (R_{jm} y_{jm} + P_{jm} x_{jm}) \geq D_m = q_m \sum_{j=1}^{l} C_{jm} B_{jm} \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Модель оптимизации плана государственных закупок сельскохозяйственной продукции по критерию максимума дохода. Найти максимум дохода

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{m=1}^{n} H_{jm} (x_{jm} + y_{jm}) \to \max$$

при ограничениях: на производство продукции

$$\sum_{m=1}^{n} (x_{jm} + y_{jm}) \leq B_j^1 \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

на лимит общего объема государственных выплат

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} (R_{jm} y_{jm} + P_{jm} x_{jm}) \leq K,$$

на выделяемые ресурсы

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} a_{sjm} (x_{jm} + y_{jm}) \leq G_s + G_s^1 \quad (s = 1, 2, \ldots, Q),$$

на производство продукции

$$0 \leq x_{jm} \leq B_{jm}; \quad 0 \leq y_{jm} \leq A_{jm} \quad (j = 1, 2, \ldots, l; \quad m = 1, 2, \ldots, n).$$

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАКУПОК СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ С УЧЕТОМ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАТРАТ НА ПЕРЕВОЗКУ ПРОДУКЦИИ

Надо найти оптимальный план закупок сельскохозяйственной продукции на сельскохозяйственных предприятиях, расположенных в различных зонах по критерию минимизации общих затрат на производство и транспортировку продукции.

Введем обозначения:

m — номер сельскохозяйственного предприятия;
n — число всех сельскохозяйственных предприятий;
l — номер предприятия, потребляющего продукцию;
J — число всех предприятий, потребляющих продукцию;
j — вид сельскохозяйственной продукции;
I — число всех видов сельскохозяйственной продукции;
s — вид трудовых ресурсов;
Q — число всех видов трудовых ресурсов;
k — вид общей расчетной площади, отводимой на производство всего объема закупок;
r — вид площади, отводимой под луга и пастбища;
R — число видов площадей, отводимых под луга и пастбища;
p — вид площади, отводимой для выращивания зерновых культур на производство товарного зерна и фуража;
b_{kjm} — потребность общей расчетной площади k-го вида для производства единицы продукции j-го вида на m-м предприятии;
b_{sjm} — затраты труда s-го вида на производство единицы продукции j-го вида на m-м предприятии;
b_{rjm} — потребность r-го вида площади, отводимой под луга и пастбища на m-м предприятии для производства единицы j-й продукции;
b_{pjm} — потребность в p-м виде площади для выращивания зерновых культур на производство единицы продукции j-го вида на m-м предприятии;
C_{jm} — затраты на производство единицы продукции j-го вида на m-м предприятии;
C_{jml} — затраты на перевозку единицы продукции j-го вида из m-го предприятия в l-е;
a_{jm} — нижняя граница производства j-й продукции на m-м предприятии;
g_{jm} — верхняя граница производства j-й продукции на m-м предприятии;
B^1_{km} — нижняя граница выделяемой общей расчетной площади k-го вида на m-м предприятии;
B^2_{km} — верхняя граница выделяемой общей расчетной площади k-го вида на m-м предприятии;
B^1_{rm} — нижняя граница для r-го вида площади, выделяемой под сенокосы на m-м предприятии;
B^2_{rm} — верхняя граница для r-го вида площади, выделяемой под сенокосы и пастбища на m-м предприятии;
B^1_{pm} — нижняя граница для p-го вида площади, выделяемой под зерновые культуры на m-м предприятии;
B^2_{pm} — верхняя граница для p-го вида площади, выделяемой под зерновые культуры на m-м предприятии;
B_{sm} — наличие трудовых ресурсов s-го вида на m-м предприятии для производства продукции по государственным закупкам;
A_{jm} — потребность m-го предприятия в j-м виде продукции;
Q_j — плановый объем заготовок j-го вида продукции по всем предприятиям;
x_{jm} — объем j-го вида продукции, заготавливаемого на m-м предприятии для внутреннего потребления;

x_{jmi} — объем j-го вида продукта, заготавливаемого на m-м предприятии и перевозимого i-му потребителю.

Математическая модель. Найти минимум производственно-транспортных затрат

$$\sum_{m=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{l} C_{jm}x_{jm}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{I}(C_{jm}+C_{jmi}x_{jmi})\,x_{jmi}\right]\to\min$$

при ограничениях: по специализации

$$a_{jm}\leqslant x_{jm}+\sum_{i=1}^{I}x_{jmi}\leqslant g_{jm}\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

по общей расчетной площади

$$B_{km}^{1}\leqslant\sum_{j=1}^{l}b_{kmj}x_{jm}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{I}b_{kmj}x_{jmi}\leqslant B_{km}^{2}\quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

по сенокосам и пастбищам

$$B_{rm}^{1}\leqslant\sum_{j=1}^{l}b_{rmj}x_{jm}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{I}b_{rmj}x_{jmi}\leqslant B_{rm}^{2}\ (r=1,2,\ldots,R;\ m=1,2,\ldots,n),$$

по площади, отводимой на зерновые культуры

$$B_{pm}^{1}\leqslant\sum_{j=1}^{l}b_{pmj}x_{jm}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{I}b_{pmj}x_{jmi}\leqslant B_{pm}^{2}\quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

по трудовым ресурсам

$$\sum_{j=1}^{l}b_{smj}x_{jm}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{I}b_{smj}x_{jmi}\leqslant B_{sm}\quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ Q;\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

по производству продукции на предприятии

$$x_{jm}+\sum_{i=1}^{I}x_{jmi}=A_{jm}\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

по плановому объему заготовок

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{m=1}^{n}x_{jmi}+Q_{j}\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

по неотрицательности переменных

$$x_{jm}\geqslant 0,\quad x_{jmi}\geqslant 0\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНА ГОСУДАРСТВЕННЫХ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ЗАКУПОК С УЧЕТОМ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ЦЕН И РЕНТАБЕЛЬНОСТИ ПРОДУКЦИИ

Необходимо составить оптимальный план закупок сельскохозяйственной продукции, при котором с максимальным уровнем рентабельности реализации всей товарной продукции обеспечивается необходимый объем заготавливаемой продукции в закупочном ассортименте.

Введем обозначения:

j — вид товарной продукции сельского хозяйства;
l — число всех видов товарной продукции сельского хозяйства;
p — вид цен, по которым производится закупка продукции;
P — число всех видов цен на сельскохозяйственную продукцию;
k — номер зоны, в которой производится продукция;
m — число всех зон, в которых производится продукция;
r — номер потребителя продукции, для которого производится закупка продукции;
s — вид ресурса;
Q — число всех видов ресурсов;
Q_{jp} — план закупок j-й продукции по p-й цене;
R — число всех потребителей;
R_k — коэффициент дифференциации рентабельности реализации продукции в k-й зоне;
A_{jk} — объем товарной продукции j-го вида, производимый в k-й зоне;
C_{jk} — затраты на производство единицы продукции j-го вида в k-й зоне;
D_{jkp} — прибыль, получаемая от реализации единицы продукции j-го вида, произведенной в k-й зоне по p-й цене;
B_{sk} — объем выделяемых ресурсов s-го вида для производства продукции в k-й зоне;
b_{sjk} — норма расхода s-го вида ресурса в k-й зоне для производства единицы продукции j-го вида;
C_{jkr} — стоимость перевозки единицы j-й продукции из k-й зоны r-му потребителю;
C — общие средства, выделяемые для перевозки всей продукции;
a_{jkp} — нижняя граница по производству j-й продукции в k-й зоне по p-й цене;
g_{jkp} — верхняя граница по производству j-й продукции в k-й зоне по p-й цене;
x_{jkp} — объем производства j-й продукции в k-й зоне по p-й цене;
y_{jkr} — объем перевозки j-й продукции из k-й зоны производства к r-му потребителю;
y — уровень рентабельности реализации продукции.

Математическая модель. Найти максимум уровня рентабельности

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{P} D_{jkp} x_{jkp}}{\sum_{k=1}^{m} R_k \sum_{j=1}^{l} C_{jk} A_{jk}} \rightarrow \max$$

при ограничениях: на плановые закупки

$$\sum_{k=1}^{m} x_{jkp} \geqslant Q_{jp} \quad (j = 1, 2, \ldots, l;\ p = 1, 2, \ldots, P),$$

на товарную продукцию

$$\sum_{p=1}^{P} x_{jkp} \leqslant A_{jk} \quad (j = 1, 2, \ldots, l;\ k = 1, 2, \ldots, m),$$

на выделяемые ресурсы

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{p=1}^{P} b_{sjk}x_{jkp} \leqslant B_{sk} \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ Q;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

на транспортные расходы

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{P} y_{jkr}C_{jkr} \leqslant C;$$

$$\sum_{p=1}^{P} x_{jkp} = \sum_{r=1}^{R} y_{jkr} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

на специализацию производства

$$a_{jkp} \leqslant x_{jkp} \leqslant g_{jkp} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ l;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ p=1,\ 2,\ \ldots,\ P).$$

Это задача линейного программирования.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНА РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА И ЗАГОТОВОК СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ПРОДУКЦИИ

В этой модели объем производства товарной продукции не задан. Введем обозначения:

s — вид ресурса;
Q — число всех видов ресурсов;
j — вид товарной продукции;
l — число всех видов товарной продукции;
k — номер зоны;
m — число всех зон;
p — вид цены;
P — число всех видов цен;
b_{sjk} — норма затрат s-го вида ресурса на производство единицы продукции j-го вида в k-й зоне;
B_{sk} — количество выделяемых ресурсов s-го вида в k-й зоне;
Q_j — государственный план заготовок j-й продукции;
Q_j^1 — гарантированный объем j-й товарной продукции, реализуемой сверх государственных плановых заготовок;
C_{jkp} — цена p-го вида за единицу j-й продукции в k-й зоне;
b_k' — сумма затрат (себестоимость) на производство всей товарной продукции в k-й зоне;
R_k — коэффициент дифференциации рентабельности зон;
y — уровень рентабельности реализации продукции (отношение суммы выручки от реализации продукции к себестоимости реализованной продукции);
q_{jk} — максимальный объем производства j-й продукции в k-й зоне;
g_{jk} — минимальный объем производства j-й продукции в k-й зоне;
q_{jkp} — максимальный объем реализации j-й продукции в k-й зоне по p-й цене;
g_{jkp} — минимальный объем реализации j-й продукции в k-й зоне по p-й цене;
x_{jkp} — объем j-й продукции в k-й зоне, реализуемой по p-й цене.

Математическая модель. Найти максимум рентабельности $y \to \max$ при ограничениях: на выделяемые ресурсы

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{p=1}^{P} b_{sjk} x_{jkp} \leqslant B_{sk} \quad (s = 1, 2, \ldots, Q;\ k = 1, 2, \ldots, m),$$

на выполнение плана заготовок

$$\sum_{k=1}^{m} x_{jkp} \geqslant Q_j \quad (p = 1;\ j = 1, 2, \ldots, l);$$

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{p=2}^{P} x_{jkp} \geqslant Q_j^1 \quad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

на рентабельность

$$R_h b_k y - \sum_{j=1}^{l} \sum_{p=1}^{P} C_{jkp} x_{jkp} = 0,$$

на производство продукции

$$g_{jk} \leqslant \sum_{p=1}^{P} x_{jkp} \leqslant q_{jk} \quad (j = 1, 2, \ldots, l;\ k = 1, 2, \ldots, m);$$

$$g_{jkp} \leqslant x_{jkp} \leqslant q_{jkp} \quad (j = 1, 2, \ldots, l;\ k = 1, 2, \ldots, m;\ p = 1, 2, \ldots, P);$$

$$y > 0.$$

Это задача линейного программирования.

Ввиду влияния случайных факторов, главным образом погодных условий, часто не удается получить надежную информацию по урожайности сельскохозяйственных культур. Поэтому в экономико-математических моделях целесообразно учитывать такую неопределенность информации в коэффициентах и ограничивающих условиях, вычисляя средние значения урожайности культур, потребности в кормах и продукции животноводства. Например, в ограничения по производству товарной продукции следует ввести нижнюю и верхнюю границы.

Глава 5

МОДЕЛИ ЗАДАЧ НА ТРАНСПОРТЕ

Функционирование и развитие отраслей промышленности и всего народного хозяйства в целом связаны с освоением источников природных ресурсов, доставкой сырья и продукции к предприятиям и заводам, а также товаров народного потребления населению. Развитие транспортной сети должно обеспечивать своевременную доставку грузов, способствовать освоению новых источников сырья, природных богатств, увеличению объемов производства продукции, снижению себестоимости продукции и повышению производительности труда во всех отраслях народного хозяйства.

При решении транспортных задач следует учитывать потребность в перевозках различного вида грузов и пассажиров, а также природные условия и экономическую эффективность транспортных средств, необходимо определить возможности расширения существующих транспортных магистралей, построения новых транспортных путей, оптимальное сочетание и развитие различных видов транспорта: железнодорожного, водного, морского, автомобильного, авиации, трубопроводного.

При решении транспортных задач большого размера (большое число поставщиков и потребителей) возникают трудности в подготовке информации и проведении расчетов. Для уменьшения размерности задачи проводят агрегирование, т. е. всех потребителей и поставщиков делят на группы и каждая группа считается одним потребителем или поставщиком. В качестве агрегированного пункта можно брать районный, областной центры или условный пункт.

Введем обозначения:

i — номер поставщика (потребителя);
x_i, y_i — координаты i-го поставщика (потребителя);
b_i — количество груза, отправляемого i-м поставщиком (количество груза, полученного i-м потребителем);
n — число поставщиков (потребителей), входящих в пункт агрегации;
x, y — координаты условного агрегированного пункта;
l_{ij} — расстояние между i-м і j-м поставщиками (потребителями), входящими в пункт агрегации.

Тогда координаты условного пункта агрегации вычисляют по формулам центра тяжести

$$x = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} b_i; \quad y = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Если условный пункт агрегации находится далеко от любого из реальных поставщиков (потребителей), то среди них (агрегированных) можно выбрать такой i_0, для которого взвешенная сумма расстояний будет наименьшей, т. е.

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} l_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{n} l_{i_0 j} b_j.$$

Реальный пункт агрегации i_0 обладает тем свойством, что суммарный объем перевозок в тонно-километрах] от него ко всем остальным агрегированным пунктам будет наименьшим.

МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Увеличение перевозок грузов и пассажиров, необходимость освоения новых районов требуют расширения и реконструкции имеющихся транспортных линий, строительства новых линий, складов, подвижного состава, транспортных средств. Для этого выделяют ресурсы, в том числе капитальные вложения. Возможны различные варианты развития транспортной сети. Выбор лучшего варианта целесообразно производить по критерию минимизации народнохозяйственных затрат при условии выполнения плана перевозок и использования выделяемых лимитируемых ресурсов. Модели развития транспортной сети формируются в зависимости от конкретных условий и видов транспорта.

ВАРИАНТНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Найти оптимальный вариант развития транспортной сети, удовлетворяющий перевозки грузов к потребителям.

Введем обозначения:

q — номер варианта развития сети;
Q — число всех вариантов развития сети;

r — вид груза;
R — число всех видов груза;
i, j — пункты, между которыми осуществляют перевозки;
s — вид лимитированного ресурса;
S — число всех видов лимитированных ресурсов;
R_{sij} — количество выделенных ресурсов s-го вида для развития участка транспортной сети между пунктами i и j;
R^q_{sijr} — потребность в s-м виде ресурсов для перевозки r-го вида груза по участку от пункта i к пункту j согласно q-му варианту развития сети;
C^q_{rij} — текущие затраты на перевозку r-го вида груза из пункта i в пункт j согласно q-му варианту развития сети;
K_{ij} — выделяемые капитальные вложения для развития участка сети от пункта i к пункту j;
K^q_{rij} — капитальные вложения, выделяемые согласно q-му варианту развития сети для перевозки r-го груза от пункта i к пункту j;
a_{rij} — план по перевозкам r-го вида груза на участке i, j;
a^q_{rij} — план перевозок r-го вида, перевозимого от пункта i к пункту j согласно q-му варианту;
E — нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений в транспорт;
x^q_{rij} — искомая величина, равная 1, если на участке от пункта i к пункту j выбирается q-й вариант развития сети по перевозке r-го вида груза, и равная 0 в противном случае.

Математическая модель. Найти минимум приведенных затрат

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{R}\sum_{q=1}^{Q}(C^q_{rij}+EK^q_{rij})\,x^q_{rij}\to\min$$

при ограничениях: выбирается лишь один вариант развития

$$\sum_{q=1}^{Q}x^q_{rij}\leqslant 1\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ r=1,\ 2,\ \ldots,\ R),$$

использование ресурсов осуществляется в выделенных объемах

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{q=1}^{Q}R^q_{sijr}x^q_{rij}\leqslant R_{sij}\ (s=1,\ 2,\ \ldots,\ S;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

освоение капитальных вложений должно быть в соответствии с выделенными объемами

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{q=1}^{Q}K^q_{rij}x^q_{rij}\leqslant K_{ij}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

план перевозок должен быть выполнен

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{q=1}^{Q}a^q_{rij}x^q_{rij}\geqslant a_{rij}\ (r=1,\ 2,\ \ldots,\ R;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Полученная модель относится к классу задач целочисленного программирования. В результате ее решения получаются такие $x^q_{rij}=1$, которые показывают оптимальные варианты развития транспортной сети. В такой постановке решение задачи развития транспортной сети может быть затруд-

нено большой размерностью. Поэтому рассматриваются и другие модели, допускающие непрерывное (недискретное) развитие транспортной сети, составление различных видов грузов и т. д.

МОДЕЛЬ НЕПРЕРЫВНОГО РАЗВИТИЯ ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ

Допускается возможность непрерывного увеличения пропускных способностей линий до определенных пределов. Необходимо найти оптимальное развитие транспортной сети.

Введем обозначения:

r — вид груза;
R — число всех видов грузов;
i, j — пункты, между которыми осуществляются перевозки;
n — число всех пунктов отправления грузов;
m — число всех пунктов получения грузов;
y_{ri} — искомое количество дополнительного груза r-го вида, который надо вывезти из i-го пункта;
C_{ri} — стоимость производства единицы r-го груза в i-м пункте;
h_{ri} — максимально возможный объем расширения производства r-го вида груза в i-м пункте;
a_{ri} — объем производства r-го вида грузов в i-м пункте;
b_{rj} — объем потребления r-го вида груза в j-м пункте;
d_{rij} — пропускные способности линии i, j по перевозкам r-го вида грузов;
y_{rij} — искомое увеличение пропускной способности участка i, j по перевозке r-го вида груза;
C_{rij} — стоимость единицы r-го вида груза на участке i, j;
q_{rij} — стоимость увеличения перевозок на единицу груза r-го вида на участке i, j;
x_{rij} — объем перевозок r-го вида груза на участке i, j.

Математическая модель. Найти такие y_{ri}, y_{rij}, x_{rij}, при которых достигается минимум затрат на транспортировку грузов и расширение сети

$$\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{n} C_{ri}y_{ri} + \sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(C_{rij}x_{rij} + q_{rij}y_{rij}) \to \min$$

и выполняются условия: по потребности в грузах

$$\sum_{i=1}^{n} x_{rij} = b_{rj} \quad (r = 1, 2, \ldots, R;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

по обеспечению потребностей

$$\sum_{j=1}^{m} x_{rij} = a_{ri} + y_{ri} \quad (r = 1, 2, \ldots, R;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

по пропускным способностям

$$0 \leqslant x_{rij} \leqslant d_{rij} + y_{rij} \quad (r = 1, 2, \ldots, R;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

по объемам производства

$$0 \leqslant y_{ri} \leqslant h_{ri} \quad (r = 1, 2, \ldots, R;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

расширение пропускной способности должно быть реальным

$$y_{rij} \geqslant 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, R;\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Сформированная модель решается как задача линейного программирования, в результате получается оптимальный план развития транспортной сети.

МОДЕЛИ КОМПЛЕКСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПАРКА ВАГОНОВ

При составлении плана перевозок железнодорожным транспортом оптимальное распределение груженых и порожних вагонов определяется с помощью критерия минимума общего пробега груженых и порожних вагонов или минимума издержек по пробегу вагонов.

Введем обозначения:

i, j — районы транспортной сети;
n — число районов транспортной сети;
r — вид перевозимого груза (считается, что порожний вагон также перевозит груз нулевого веса);
R — число видов перевозимых грузов;
l — вид вагона для перевозки груза;
L — число видов вагонов;
Q_{ijr} — план (объем) перевозки r-го вида груза из района i в район j;
a_{lr} — норма загрузки l-го вида вагона r-м видом груза;
N_l — число вагонов l-го вида;
n_{il} — предельное число вагонов l-го вида, которые можно использовать в i-м районе;
h_{ij} — расстояние между центрами i-го и j-го районов;
t_{ijr} — время передвижения r-го вида груза из i-го района в j-й;
T — длительность периода, в течение которого производятся перевозки;
x_{ijrl} — искомое число вагонов l-го вида, предназначенных для перевозки r-го вида груза из района i в район j.

Модель комплексного регулирования парка вагонов состоит в нахождении таких $x_{ijrl} \geqslant 0$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $r = 1, \ldots, R$; $l = 1, 2, \ldots, L$), при которых достигается минимум общего пробега груженых и порожних вагонов

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{l=1}^{L} R_{ij} x_{ijrl} \to \min$$

и выполняются условия: по перевозке грузов

$$\sum_{l=1}^{L} a_{lr} x_{ijrl} = Q_{ijr} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, R),$$

по времени

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ijr} x_{ijrl} \leqslant T N_l \quad (l = 1, 2, \ldots, L),$$

по возможности сосредоточения вагонов

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{n} x_{jirl} - \sum_{r=1}^{R} \sum_{j=1}^{n} x_{ijrl} \leqslant n_{il} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, L).$$

В последнем неравенстве первая сумма означает число вагонов l-го вида, прибывших в i-й район, а вторая сумма — число вагонов l-го вида, убывших из i-го района. Таким образом, модель комплексного регулирования парка вагонов сформулирована как задача линейного программирования и может решаться известными методами.

МОДЕЛЬ КОМПЛЕКСНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПАРКА ВАГОНОВ С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ПОСТАВКИ ВАГОНОВ

Если для выполнения заданного плана перевозок наличного парка вагонов недостаточно, то ставится задача определить необходимое дополнительное число вагонов.

Введем обозначения:

r — вид груза;
i, j — пункты перевозки грузов;
l — вид вагона;
C_{ijvl} — затраты на перевозку одного вагона l-го вида, наполненного r-м грузом, из i-го района в j-й;
C_l — стоимость одного вагона l-го вида;
E — нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений в железнодорожный транспорт;
q — вид стандартного вагона, который принимается за эквивалент (например двухосный);
α_{lq} — число вагонов l-го вида, эквивалентное одному вагону q-го вида;
M_1, M_2 — нижняя и верхняя границы поставок вагонов в эквивалентном исчислении по стандартным вагонам q-го типа;
z_l — искомое число дополнительной поставки вагонов l-го типа.

Тогда модель комплексного регулирования парка вагонов с учетом их дополнительной поставки состоит в нахождении таких $z_l \geqslant 0$ ($l = 1, 2, \ldots, L$) и $x_{ijrl} \geqslant 0$ (i, $j = 1, 2, \ldots, n$; $r = 1, 2, \ldots, R$; $l = 1, 2, \ldots, L$), при которых достигается минимум общих затрат на поставку и эксплуатацию вагонов

$$\sum_{l=1}^{L} EC_l z_l + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{R} \sum_{l=1}^{L} C_{ijrl} x_{ijrl} \to \min$$

и выполняются условия: по времени

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ijr} x_{ijrl} \leqslant T (N_l + z_l) \quad (l = 1, 2, \ldots, L),$$

по объему поставок вагонов

$$M_1 \leqslant \sum_{i=1}^{L} \alpha_{lq} z_l \leqslant M_2,$$

а также по выполнению плана перевозок и возможности сосредоточения вагонов в каждом районе. Полученная модель является задачей линейного программирования, и ее можно решать известными методами.

Заметим, что модель комплексного регулирования парка вагонов можно использовать для решения задач перевозок любым видом транспорта.

МОДЕЛИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ЗА ПОСТАВЩИКАМИ

В процессе производства и потребления продукции может возникнуть необходимость прикрепления поставщиков продукции к потребителям таким образом, чтобы поставки грузов производились с наименьшими затратами. При этом можно решить задачу как с учетом стоимости возврата транспортных средств на места дислоцирования, так и без учета. Рассмотрим модели этих двух задач.

МОДЕЛЬ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ПОСТАВЩИКОВ ЗА ПОТРЕБИТЕЛЯМИ (БЕЗ УЧЕТА СТОИМОСТИ ВОЗВРАТА ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ)

Введем обозначения:

i — номер поставщика;
r — вид груза;
j — номер потребителя;
n — число поставщиков;
R — число видов груза;
m — число потребителей;
a_{ir} — количество груза r-го вида, имеющегося у i-го поставщика;
b_{jr} — количество r-го вида груза, необходимого j-му потребителю;
C_{ijr} — стоимость перевозки единицы r-го вида груза от i-го поставщика к j-му потребителю;
d_{ijr} — пропускные возможности участка сети (i, j) по перевозке r-го вида груза;
x_{ijr} — искомый объем перевозки r-го вида груза от i-го поставщика к j-му потребителю.

Тогда модель закрепления поставщиков за потребителями состоит в нахождении таких x_{ijr} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, R)$, при которых достигается минимум затрат на перевозку всех грузов

$$\sum_{i}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{R} C_{ijr} x_{ijr} \to \min$$

и выполняются ограничения: по вывозу груза

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijr} = a_{ir} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, R),$$

по доставке грузов

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ijr} = b_{jr} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, R),$$

по пропускным способностям

$$0 \leqslant x_{ijr} \leqslant d_{ijr} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, R),$$

по балансу потребления и производства

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ir} = \sum_{j=1}^{m} b_{ir} \quad (r = 1, 2, \ldots, R).$$

Полученная модель является транспортной задачей с ограничениями на пропускные способности, в результате ее решения получим объемы перевозок (транспортные потоки между поставщиками и потребителями) и, следовательно, оптимальное прикрепление поставщиков к потребителям.

МОДЕЛЬ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ЗА ПОСТАВЩИКАМИ С УЧЕТОМ ВОЗВРАТА ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

При массовых перевозках грузов от предприятий, производящих продукцию, к потребителям возникает необходимость определить не только закрепление поставщиков к потребителям, но и выбрать маршруты перевозок таким образом, чтобы обеспечить минимум порожних пробегов и возврат транспортных средств. Такие задачи решаются по критерию минимума эксплуатационных затрат или тонно-километрового пробега. Рассмотрим эту задачу при перевозках однородной продукции.

Задача решается в три этапа:

С помощью модели закрепления поставщиков за потребителями решают обычную транспортную задачу без учета возврата транспортных средств

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} x_{ij} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

где C_{ij} — затраты на перевозку единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю; a_i — количество вывозимого груза от i-го поставщика; b_i — количество потребляемого груза j-м потребителем; x_{ij} — количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю.

Решением этой задачи являются транспортные потоки x_{ij} между потребителями и поставщиками. Зная вместимость a транспортного средства, можно определить число транспортных средств n_{ij}, необходимых для перевозки грузов по формуле

$$n_{ij} = x_{ij}/a \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Число транспортных средств, прибывших к j-му потребителю,

$$n_j = \sum_{i=1}^{n} n_{ij} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

и отправленных от i-го поставщика,

$$n_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

С помощью решения обычной транспортной задачи определяют оптимальные обратные потоки транспортных средств

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C^1_{ji} y_{ji} \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ji} = n_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ji} = n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m); \quad y_{ji} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;$$
$$j = 1, 2, \ldots, n)$$

где C^1_{jl} — стоимость возврата единицы транспортных средств от потребителя j к поставщику l; y_{jl} — число транспортных средств, отправленных от j-го потребителя к l-му поставщику.

Определяют маршруты следований к l-му поставщику.

МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ ПО ЛИНИЯМ

При планировании перевозок целесообразно учитывать производительность транспортных средств в зависимости от линии перевозки, т. е. выделяемые транспортные средства должны обеспечить перевозки по установленным линиям. Модели этих задач формируются в зависимости от степени детализации учета требований функционирования различных видов транспорта.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АВТОМОБИЛЕЙ (СУДОВ) ПО ЛИНИЯМ

Для составления модели введем следующие обозначения:

s — вид автомобиля (судна);

S — число видов автомобилей (судов);

j — вид линии;

m — число видов линий;

b_j — объем перевозок по j-й линии;

b_{sj} — количество груза, перевозимого одним автомобилем (судном) s-го вида по j-й линии;

a_s — число автомобилей (судов) s-го вида;

p_{sj} — прибыль от эксплуатации одного автомобиля (судна), осуществляющего перевозки по j-й линии;

x_{sj} — искомое число автомобилей (судов) s-го вида; осуществляющих перевозки по j-й линии.

Тогда модель распределения автомобилей (судов) по линиям состоит в нахождении таких значений $x_{sj} \geqslant 0$ ($s = 1, 2, \ldots, S$; $j = 1,2, \ldots m$), при которых достигается максимум прибыли

$$\sum_{s=1}^{S} \sum_{j=1}^{m} P_{sj} x_{sj} \rightarrow \max$$

и выполняются условия: по числу автомобилей (судов)

$$\sum_{j=1}^{m} x_{sj} \leqslant a_s \quad (s = 1, 2, \ldots, S),$$

по объему перевозок

$$\sum_{s=1}^{S} b_{sj} x_{sj} \geqslant b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Сформированная модель относится к классу распределительных задач. Решая эту задачу, получаем оптимальное число автомобилей (судов) каждого вида для перевозки груза по имеющимся линиям.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ САМОЛЕТОВ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ ПО АВИАЛИНИЯМ

Различные типы самолетов гражданской авиации отличаются друг от друга грузоподъемностью, вместимостью пассажиров, себестоимостью рейса.

Каждый самолет, выполняя рейс по авиалинии, перевозит определенное число пассажиров, грузов и почты. Во время рейса он затрачивает определенное количество различного вида ресурсов, влияющих на себестоимость рейса, которая зависит от типа самолета, выполняющего этот рейс. Поскольку тарифная плата за перевозку пассажира или единицы груза не зависит от типа самолета, то прибыль аэрофлота зависит от эксплуатации самолетов по авиалинии. Поэтому оптимальным распределением самолетов по авиалиниям считается такое, при котором выполняется план перевозок при минимальной общей себестоимости перевозок или максимальной прибыли от перевозок.

Авиалинией считается маршрут, начинающийся в каком-либо аэропорту и заканчивающийся в другом с промежуточными остановками или без них. Авиалинии могут быть маятниковые, начинаться и заканчиваться в одном аэропорту. Вообще говоря, маршрут, выполняемый в обратном направлении, может считаться отдельной авиалинией (например, одна авиалиния Киев—Москва, а другая Москва — Киев).

Введем обозначения:

p — номер аэропорта;
i — тип самолета;
n — число всех типов самолетов;
j — номер авиалинии;
m — число всех авиалиний;
n_i — число самолетов i-го типа;
k_i — коэффициент исправности самолетов i-го типа;
R_i — число пассажиров, помещающихся в самолете i-го типа;
u_i — количество тонн почты, перевозимой i-м типом самолета;
v_i — количество груза, перевозимого i-м типом самолета;
S_{ij} — максимальное число рейсов, которые может сделать самолет i-го типа по авиалинии j за единицу времени (квартал);
C_{ij} — себестоимость одного рейса, выполненного i-м типом самолета по j-й авиалинии;
F_j — стоимость билета для одного пассажира на j-й авиалинии;
E_j — плата аэрофлоту за перевозку 1 т почты по j-й авиалинии;
G_j — плата аэрофлоту за перевозку 1 т груза по j-й авиалинии;
a_j — число пассажиров, которое надо перевезти по j-й авиалинии за единицу времени;
b_j, g_j — количество тонн почты и груза, которое надо перевезти по j-й авиалинии за единицу времени;
d_j — минимальное число рейсов по j-й авиалинии за единицу времени;
ε_j — наиболее вероятное отклонение числа пассажиров на j-й авиалинии;
δ_j — наиболее вероятное отклонение объема почты на j-й авиалинии;
σ_j — наиболее вероятное отклонение объема грузов на j-й авиалинии;
x_{ij} — искомое число самолетов i-го типа, которые должны быть назначены на j-ю авиалинию.

Тогда модель оптимального распределения самолетов по авиалиниям, согласно критериям минимума себестоимости, состоит в нахождении таких $x_{ij} \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, , \ldots, m$), при которых достигается минимум себестоимости

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} S_{ij} x_{ij} \to \min$$

и выполняются условия: по перевозке пассажиров

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij} R_i \geqslant a_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

по перевозке почты

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij} u_j \geqslant b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

по перевозке грузов

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij} v_i \geqslant d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

по числу действующих самолетов

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leqslant k_i n_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

по выполнению минимального числа рейсов

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij} \geqslant g_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

по балансу прибывающих и убывающих самолетов

$$\sum_{i \in \Pi_p} x_{ij} S_{ij} = \sum_{j \in У_p} x_{ij} S_{ji} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где Π_p — множество авиалиний j, по которым i-й самолет прибывает в аэропорт p; $У_p$ — множество авиалиний j, по которым i-й самолет убывает из аэропорта p. Последнее равенство надо учитывать только для конечных аэропортов, так как в промежуточных (транзитных) аэропортах оно выполняется автоматически.

Модель оптимального распределения самолетов по авиалиниям согласно критерия максимума прибыли состоит в нахождении таких $x_{ij} \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, m$), при которых достигается максимум прибыли

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} S_{ij} [R_i F_j + u_i E_j + v_i G_j - C_{ij}] \to \max$$

и выполняются условия: по перевозке пассажиров

$$a_j - \varepsilon_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij} R_i \leqslant a_j + \varepsilon_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

по перевозке почты

$$b_j - \delta_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij} u_i \leqslant b_j + \delta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

по перевозке грузов

$$d_j - \delta_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_{ij} S_{ij} v_i \leqslant d_j + \sigma_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

по числу действующих самолетов, выполнению минимального числа рейсов, балансу прибывающих и убывающих самолетов — аналогично модели, использующей критерий минимума себестоимости. Сформированные модели распределения самолетов по авиалиниям решаются как задачи линейного программирования.

МОДЕЛЬ ПОПОЛНЕНИЯ САМОЛЕТОВ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

Если с помощью наличного парка самолетов нельзя выполнить план перевозок, то необходимо определить дополнительное число x_i самолетов i-го типа по цене P_i и срокам эксплуатации T_i.

Математическая модель состоит в нахождении таких $x_i \geqslant 0$, $x_{ij} \geqslant 0$ ($i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., m$), при которых достигается минимум общих затрат

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i P_i}{T_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} S_{ij} x_{ij} \to \min$$

и выполняются условия: по числу самолетов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant k_i (x_i + n_i)$$

и другие ограничения по объему перевозок пассажиров, почты, грузов, минимальному числу рейсов по авиалинии, балансу прибывающих и убывающих самолетов.

В приведенных моделях величина S_{ij} выражает максимальное число рейсов i-го типа самолета по j-й авиалинии и вычисляется по формуле

$$S_{ij} = qT_{ij}/(t_{ij} + \tau_{ij} + \gamma_{ij}),$$

где T_{ij} — часть суток, в течение которой самолет i-го типа может летать по j-й авиалинии; t_{ij} — время полета i-го типа самолета по j-й авиалинии; τ_{ij} — общее время стоянок самолета i-го типа во время рейса по j-й авиалинии; γ_{ij} — среднее время задержек i-го типа самолета во время выполнения рейса по j-й авиалинии; q — число суток в рассматриваемом периоде (квартале).

Решая поставленную задачу симплекс-методом, получаем оптимальный план дополнительных самолетов и их распределение по авиалиниям.

МОДЕЛИ ПЕРЕВОЗОК С УЧЕТОМ ПЕРЕВАЛОК

Необходимость перевозки несколькими видами транспорта сопряжена с перевалками грузов в определенных пунктах и в определенной последовательности, так как многие грузы невозможно доставить потребителю одним видом транспорта. Возникают потребности определить оптимальную последовательность перевалок груза на соответствующие виды транспорта. Решая вопрос о наилучших способах распределения груза, следует учесть направленные грузопотоки, исключающие встречные перевозки одинаковых грузов. Транспортную сеть условно можно разбить на звенья в соответствии с используемым видом транспорта. Промежуточные пункты имеют демпфирующие устройства, обеспечивающие хранение груза во время перевалок. Рассмотрим два вида моделей.

МОДЕЛЬ ПЕРЕВОЗОК РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ГРУЗОВ С ОДНОЙ ПЕРЕВАЛКОЙ

Необходимо доставить груз потребителю двумя видами транспорта с одной перевалкой в каком-либо пункте.

Введем обозначения:

i — пункт отправления груза;
n — число пунктов отправления грузов;
j — пункт потребления грузов;
m — число пунктов потребления грузов;
k — пункт перевалки;
K — число пунктов перевалки;
r — вид груза;
R — число видов груза;
a_{ir} — количество r-го вида груза в i-м пункте для отправки;
a_{kr} — пропускные способности k-го перевалочного пункта по перевозке r-го вида груза;
b_{jr} — потребность в r-м виде груза в конечном j-м пункте;
C_{ijkr} — стоимость перевозки единицы r-го вида груза из i-го пункта в j-й через k-й пункт перевалки;
x_{ijkr} — объем перевозок r-го вида груза из i-го пункта в j-й через k-й пункт перевалки.

Математическая модель состоит в нахождении таких

$$x_{ijkr} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, K;\ r = 1, 2, \dots, R),$$

при которых обеспечиваются минимальные затраты

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k} \sum_{r=1}^{R} C_{ijkr} x_{ijkr} \to \min$$

и выполняются условия: по отправке грузов

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} x_{ijkr} = a_{ir} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ r = 1, 2, \dots, R),$$

по пропускным способностям пунктов перевалки

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ijkr} \leqslant a_{kr} \quad (k = 1, 2, \dots, K;\ r = 1, 2, \dots, R),$$

по обеспечению потребителей

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} x_{ijkr} = b_{jr} \quad (j = 1, 2, \dots, m;\ r = 1, 2, \dots, R).$$

Решая эту задачу как многоиндексную транспортную задачу, получаем оптимальный план перевозок с указанием пунктов перевалки. Заметим, что в стоимость C_{ijkr} перевозки груза входят затраты на его перевозку, разгрузку и погрузку.

МОДЕЛЬ ПЕРЕВОЗОК ПРИ МНОГОЭТАПНЫХ ПЕРЕВАЛКАХ ГРУЗОВ

В практике может возникнуть потребность в перевозках грузов более чем двумя видами транспорта. Поэтому в этом случае при решении задачи оптимальных перевозок необходимо учесть несколько перевалок груза.

Введем обозначения:

t — этап перевалки груза;
T — число всех этапов перевалки;
u — номер пункта перевалки t-го этапа;
n_t — число всех пунктов перевалки t-го этапа;
k — номер пункта перевалки $(t+1)$-го этапа;
n_{t+1} — число всех пунктов перевалки $(t+1)$-го этапа;
a^u_{tr} — пропускная способность u-го пункта перевалки t-го этапа по перевозке r-го вида груза;
$a^k_{(t+1)r}$ — пропускная способность k-го пункта перевалки $(t+1)$-го этапа по перевозке r-го вида груза;
C^{ik}_{0r} — стоимость перевозки единицы r-го вида груза из i-го начального пункта в k-й пункт перевалки 1-го этапа;
C^{uk}_{tr} — стоимость перевозки единицы r-го вида груза из u-го пункта; перевалки t-го этапа в k-й пункт перевалки $(t+1)$-го этапа;
C^{uj}_{Tr} — стоимость перевозки единицы r-го вида груза из u-го пункта перевалки последнего этапа в j-й пункт потребления;
x^{ik}_{0r} — искомый объем перевозки r-го вида груза из i-го начального пункта в k-й пункт перевалки 1-го этапа;
x^{uk}_{tr} — искомый объем перевозки r-го вида груза из u-го пункта перевалки t-го этапа в k-й пункт перевалки $(t+1)$-го этапа;
x^{uj}_{Tr} — искомый объем перевозки r-го вида груза из u-го пункта перевалки последнего этапа в j-й пункт потребления.

Математическая модель. Найти минимум общей стоимости перевозок

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{r=1}^{R} C^{ik}_{0r}x^{ik}_{0r} + \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{u=1}^{n_t}\sum_{k=1}^{n_{t+1}}\sum_{r=1}^{R} C^{uk}_{tr}x^{uk}_{tr} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{u=1}^{n_{T-1}}\sum_{r=1}^{R} C^{uj}_{Tr}\,x^{uj}_{Tr} \rightarrow \min$$

при условиях: по отправке грузов

$$\sum_{k=1}^{n_1} x^{ik}_{0r} = a_{tr} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ u;\quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ R),$$

по пропускным способностям пунктов перевалки

$$\sum_{u=1}^{n_t} x^{uk}_{tr} \leqslant a^k_{(t+1)r} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_{t+1};\quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T-1;$$

$$r = 1,\ 2,\ \ldots,\ R);\quad \sum_{k=1}^{n_{t+1}} x^{uk}_{tr} \leqslant a^u_{tr}\ (u = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_t;$$

$$t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T-1;\quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ R),$$

по балансу перевозки грузов в каждом пункте перевалки

$$\sum_{u=1}^{n_t} x^{uk}_{tr} = \sum_{u=1}^{n_{t+1}} x^{ku}_{(t+1)r} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_{t+1};\quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ R;$$

$$t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T-1),$$

по потребностям в грузах в конечных пунктах

$$\sum_{u=1}^{n_T} x_{Tr}^{uj} = b_{jr} \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \quad r = 1, 2, \ldots, R),$$

по выполнению условий совместимости

$$\sum_{u=1}^{n_t} a_{tr}^{u} \geqslant \sum_{k=1}^{n_{t+1}} a_{(t+1)r}^{k} \geqslant \sum_{j=1}^{m} b_{jr} \quad (t = 1, 2, \ldots, T; \quad r = 1, 2, \ldots, R).$$

Эта модель перевозок с учетом нескольких перевалок составлена в виде задачи линейного программирования.

Пример 19. Из трех пунктов отправляется однородный груз в пять пунктов потребления через четыре пункта перевалки. Перевалка осуществляется один раз, т. е. в один этап. Объемы отправляемой продукции из каждого пункта и стоимость перевозки из пунктов отправления в пункты перевалки

24. Показатели перевозок из пунктов отправления в пункты перевалки

Пункт отправления	Стоимость перевозок единицы груза из пункта отправления в пункты перевалок, руб.				Объем отправляемой продукции, т
	1	2	3	4	
1	4	5	7	6	70
2	7	12	10	11	80
3	6	11	8	9	90

25. Показатели перевозок из пунктов перевалок в пункты потребления

Пункты перевалок	Стоимость перевозки единицы груза из пунктов перевалок в пункты потребления, руб.				
	1	2	3	4	5
1	4	3	7	3	7
2	8	3	4	9	11
3	4	3	4	7	7
4	6	2	2	8	8

приведены в табл. 24. Пропускные способности пунктов перевалки: 1-го — 60 т, 2-го — 90 т, 3-го — 120 т, 4-го — 70 т. Объемы потребляемой продукции в пунктах доставки равны: 1-го — 30 т, 2-го — 20 т, 3-го — 80 т, 4-го — 50 т, 5-го — 60 т. Стоимости перевозок из пунктов перевалки в пункты потребления приведены в табл. 25. Пусть x_0^{ik} — объем перевозок из i-го пункта отправки в k-й перевалочный пункт; x_1^{uj} — объем перевозки из u-го пункта перевалки в j-й пункт потребления. Тогда модель перевозок с учетом перевалок состоит в минимизации общей стоимости перевозок

$$C = 4x_0^{11} + 5x_0^{12} + 7x_0^{13} + 6x_0^{14} + 7x_0^{21} + 12x_0^{22} + 10x_0^{23} + 11x_0^{24} + 6x_0^{31} +$$
$$+ 11x_0^{32} + 8x_0^{33} + 9x_0^{34} + 4x_1^{11} + 3x_1^{12} + 7x_1^{13} + 3x_1^{14} + 7x_1^{15} + 8x_1^{21} +$$
$$+ 3x_1^{22} + 4x_1^{23} + 9x_1^{24} + 11x_1^{25} + 4x_1^{31} + 3x_1^{32} + 4x_1^{33} + 7x_1^{34} + 7x_1^{35} + 6x_1^{41} +$$
$$+ 2x_1^{42} + 2x_1^{43} + 8x_1^{44} + 8x_1^{45} \to \min$$

при ограничениях: на отправляемые грузы

$$x_0^{11} + x_0^{12} + x_0^{13} + x_0^{14} = 70; \quad x_0^{21} + x_0^{22} + x_0^{23} + x_0^{24} = 80;$$
$$x_0^{31} + x_0^{32} + x_0^{33} + x_0^{34} = 90,$$

на пропускные способности

$$x_0^{11} + x_0^{21} + x_0^{31} \leqslant 60; \quad x_0^{12} + x_0^{22} + x_0^{32} \leqslant 90;$$
$$x_0^{13} + x_0^{23} + x_0^{33} \leqslant 120; \quad x_0^{14} + x_0^{24} + x_0^{34} \leqslant 70,$$

на баланс ввоза и вывоза в каждом пункте перевалки

$$\sum_{i=1}^{3} x_0^{ik} = \sum_{j=1}^{5} x_1^{kj} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Баланс грузов отправителей и получателей выполняется: $70 + 80 + 90 = 30 + 20 + 80 + 50 + 60 = 240$. Совокупная пропускная способность перевалочных пунктов достаточна для осуществления перевозок $70 + 80 + 90 = 240 < 60 + 90 + 120 + 70 = 340$. Решение задачи приведено в табл. 26 и 27. Таким образом, оптимальный план перевозок состоит в следующем: из 1-го пункта отправления весь груз $x_0^{14} = 70$ т надо везти в 4-й пункт перевалки, откуда весь груз $x_1^{43} = 70$ т везти в 3-й пункт потребления, а недостающий груз 10 т он получит из 3-го пункта перевалки $x_1^{33} = 10$ т; из 2-го пункта отправления надо везти $x_0^{21} = 60$ т в 1-й пункт перевалки и $x_0^{23} = 20$ т в 3-й пункт перевалки; из 3-го пункта отправления надо везти

26. Объемы перевозок из пунктов отправления в пункты перевалок

i	k			
	1	2	3	4
1	0	0	0	70
2	60	0	20	0
3	0	0	90	0

27. Объемы перевозок из пунктов перевалок в пункты потребления

u	$j = l$				
	1	2	3	4	5
1	10	0	0	50	0
2	0	0	0	0	0
3	20	20	10	0	60
4	0	0	70	0	0

весь груз $x_0^{33} = 90$ т в 3-й пункт перевалки; из 1-го пункта перевалки надо везти $x_1^{14} = 50$ т в 4-й пункт потребления, во 2-й пункт перевалки ничего не поступает и не вывозится; из 3-го пункта перевалки надо везти $x_1^{31} = 20$ т в 1-й пункт потребления, $x_1^{32} = 20$ т — во 2-й пункт потребления, $x_1^{33} = 10$ т — в 3-й пункт потребления, $x_1^{35} = 60$ т — в 5-й пункт потребления; из 4-го пункта перевалки надо везти весь груз $x_1^{43} = 70$ т в 3-й пункт потребления. При этом общие затраты на перевозки составят $6 \cdot 70 + 7 \cdot 60 + 10 \cdot 20 + 8 \cdot 90 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 50 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 7 \cdot 60 + 2 \cdot 70 = 2690$ руб.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА В СЕТЕВОЙ ПОСТАНОВКЕ

Грузы перевозят по определенным маршрутам, проходящим от начального пункта через промежуточные к конечному. В схеме транспортной сети все пункты нумеруют в определенном порядке. Все пункты, между которыми осуществляют перевозки, соединяют дугами или стрелками, указывающими направление перевозки, и получается сеть с множеством вершин (точек). Количественные характеристики сети следующие: d_i — интенсивность перевозок грузов в i-м пункте (количество груза отгруженного и отправленного из i-го пункта). Если $d_i > 0$, то груз из i-го пункта должен быть отправлен в количестве d_i; если $d_i = 0$, то количество груза, прибывающего в i-й пункт, равно количеству убывающего груза, т. е. в этом случае i-й пункт выполняет роль транзитного; если $d_i < 0$, то i-й пункт получает груз для потребления

в количестве $|d_i|$; d_{ij} — пропускная способность отрезка пути (i, j); C_{ij} — стоимость перевозки единицы груза по отрезку пути (i, j); x_{ij} — количество груза, перевозимого от пункта i к пункту j.

Тогда транспортная задача в сетевой постановке запишется в виде. Найти такие потоки $x_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$, при которых достигается минимум затрат на перевозки

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

и выполняются условия: по перевозкам

$$\sum_{j} x_{ij} - \sum_{j} x_{ji} = d_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и по пропускным способностям

$$x_{ij} \leqslant d_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Критерием оптимальности плана x_{ij} транспортной задачи в сетевой поставке является существование чисел (потенциалов) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ таких, что

$$u_j - u_i = C_{ij} \text{ при } 0 < x_{ij} < d_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$
$$u_j - u_i \leqslant C_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$
$$u_j - u_i \geqslant C_{ij} \text{ при } x_{ij} = d_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. решение транспортной задачи в сетевой постановке проводится с помощью метода потенциалов по аналогии с решением транспортной задачи в матричной форме.

Сетевая постановка транспортной задачи оказывается удобней в тех случаях, когда стоимость перевозок является аддитивной, т. е. она равна сумме поучастковых стоимостей $(C_{ij} = C_{ik} + C_{kj})$. Тогда формирование общей стоимости перевозок между пунктами можно алгоритмизировать и проводить с помощью ЭВМ. Например, при решении задачи на минимум себестоимости перевозок можно считать, что общая себестоимость складывается из поучастковых. При использовании критерия тарифной платы это уже не так, поскольку тарифная плата не аддитивна (тарифная плата $C_{ij} \neq$ $\neq C_{ik} + C_{kj}$).

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ПО ПЕРЕГРУЗОЧНЫМ КОМПЛЕКСАМ

При развитии транспортных узлов необходимо оптимально распределить капитальные вложения по критерию максимума эффективности капитальных вложений.

Введем обозначения:

i — номер транспортного узла;
n — число всех транспортных узлов;
k — номер перегрузочного комплекса;
m_i — число всех перегрузочных комплексов i-го транспортного узла;
q — число возможных вариантов развития;
s — вид ресурсов, выделяемых для развития перегрузочных комплексов;
l — число всех видов ресурсов;
t — год планового периода;

T — число лет планового периода;

P_{ikq} — прирост прибыли на k-м перегрузочном комплексе i-го транспортного узла согласно q-му варианту развития;

K_{ikq} — капитальные вложения для развития k-го перегрузочного комплекса i-го транспортного узла согласно q-му варианту;

K — лимит капитальных вложений на развитие всех перегрузочных комплексов;

b_{ikq}^{st} — затраты s-го вида ресурсов в t-м году на развитие k-го перегрузочного комплекса i-го транспортного узла согласно q-му варианту;

B^{st} — количество выделяемых ресурсов s-го вида в t-м году;

x_{ikq} — искомая величина, равная 1, если на k-м перегрузочном комплексе i-го транспортного узла принят q-й вариант развития, и равная 0 в противном случае.

Математическая модель. Найти максимум эффективности капитальных вложений

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{q=1}^{r} P_{ikq}x_{ikq}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{q=1}^{r} K_{ikq}x_{ikq}} \to \max$$

при ограничениях: на лимит капитальных вложений

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{q=1}^{l} K_{ikq}x_{ikq} \leqslant K,$$

на другие виды ресурсов

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_i}\sum_{q=1}^{r} b_{ikq}^{st} \leqslant B^{st} \quad (s = 1, 2, \ldots, l; \quad t = 1, 2, \ldots, T),$$

на выбор одного варианта

$$\sum_{q=1}^{l} x_{ikq} \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m_i),$$

на целочисленность переменных

$$x_{ikq}(1 - x_{ikq}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad q = 1, 2, \ldots, l).$$

Это задача целочисленного программирования, которая может решаться методами ветвей и границ с помощью динамического программирования. Экономико-математические модели при решении задач на транспорте дают возможность получать лучшие результаты и широко используются на практике, особенно при определении перевозок грузов.

Глава 6

МОДЕЛИ ЗАДАЧ ТОРГОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Торговая деятельность, направленная на выполнение функций обмена между производством и потреблением товаров населением, регулирует производство товаров народного потребления, предоставляет населению возможности приобретения необходимых благ. Развитие торговли, совершенствование планирования и управления торговой деятельностью способствует повышению эффективности общественного производства и росту благосостояния населения.

МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВОЙ СЕТИ

Спрос на различные товары зависит от населения, товары в магазины поставляют со складов. Необходимо разместить торговые магазины так, чтобы общие затраты на строительство, эксплатацию, транспортировку продукции и потери от некачественного обслуживания покупателей были наименьшими.

Введем обозначения:

i — номер склада (базы);
n — число всех складов (баз);
r — вид товара;
R — число всех видов товара;
j — номер торговой точки (магазина);
m — число торговых точек;
q — номер варианта развития торговой точки;
Q_j — число возможных вариантов развития j-й торговой точки;
N_{ir} — количество r-го вида товара на i-м складе;
M^q_{jr} — количество реализуемой продукции r-го вида в j-й торговой точке согласно q-му варианту;
P^q_j — приведенные затраты j-й торговой точки согласно q-му варианту;
W_r — объем продукции r-го вида, потребляемой во всей торговой сети;
C^r_{ij} — стоимость перевозки единицы продукции r-го вида от i-го склада к j-й торговой точке;
C^q_j — потери за счет траты времени покупателей (некачественного обслуживания) в j-й торговой точке, развивающейся согласно q-му варианту;
x^q_j — искомая величина, равная 1, если в j-й торговой точке выбирается q-й вариант, и равная 0 в противном случае;
x^r_{ij} — объем перевозки r-й продукции из i-го склада в j-ю торговую точку.

В этой модели размещения розничной торговой сети требуется найти такие x^q_j и $x^r_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2, \ldots, R;\ q = 1, 2, \ldots, Q)$, при которых достигается минимум совокупных затрат и потерь

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{q=1}^{Q_j} (P^q_j + C^q_j)\, x^q_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{R} C^r_{ij} x^r_{ij} \to \min$$

и выполняются условия: вывоз товаров из склада должен быть в пределах возможного

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{r} \leqslant N_{ir} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad r = 1, 2, \ldots, R),$$

поставляемые товары должны соответствовать мощностям торговых точек

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{r} = \sum_{q=1}^{Q} M_{jr}^{q} x_{j}^{q} \quad (j = 1, 2, \ldots, m; \quad r = 1, 2, \ldots, R),$$

объем поставляемой продукции должен соответствовать потреблению

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{r} = W_{r} \quad (r = 1, 2, \ldots, R),$$

должен быть выбран только один вариант развития торговой точки

$$\sum_{q=1}^{Q_j} x_{j}^{q} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Решая полученную задачу, получаем оптимальные варианты развития торговых точек x_j^q и транспортные потоки x_{ij}^r, т. е. получаем оптимальное размещение розничной торговой сети.

Заметим, что потери покупателей C_j^q могут рассчитываться в стоимостном выражении. Например, $C_j^q = t_j^q cs$, где t_j^q — средние потери времени в часах одним покупателем за счет простаивания в очереди и покупки товара в j-м магазине, развивающемся согласно q-му варианту; c — средняя заработная плата одного человека за один час; s — среднее число покупателей в j-м магазине.

МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ТОРГОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

На основании изучения спроса покупателей торговое предприятие разрабатывает месячные, квартальные и годовые планы своей хозяйственной деятельности. При этом следует учитывать возможность увеличения прибыли предприятия, выполнения плана товарооборота, полного удовлетворения спроса покупателей на различные виды товаров и качества обслуживания. Другими словами, в плане торгового предприятия должны быть отражены способы наилучшего использования имеющихся ресурсов: торговые залы, складские помещения, численность персонала,торговое оборудование и т. д.

Введем обозначения:

r — вид товарной группы;
R — число всех видов товарных групп;
s — вид товара, реализуемого в магазине;
S_r — число видов товара в r-й товарной группе;
Q_1, Q_2 — нижняя и верхняя границы объема товарооборота для магазина;
l — вид трудовых ресурсов, используемых в магазине;
L — число всех видов трудовых ресурсов;
b_l — время, которое могут работать продавцы l-й квалификации в данном магазине;
k — вид имеющихся в магазине площадей (торговые залы, подсобные помещения и др.);

K — число видов площадей;
b_k — наличные в магазине площади k-го вида;
h — вид издержек обращения в денежном выражении;
H — число всех видов обращения;
b_h — объем издержек обращения в денежном выражении;
P_{rs} — прибыль магазина от реализации единицы товара s-го вида из r-й группы товаров;
α_{rs}, β_{rs} — нижний и верхний пределы по реализации s-го вида товара из r-й группы товаров;
q_{rs} — средняя розничная цена s-го вида товара из r-й группы товаров;
b_{rs}^l — норма расхода времени на продажу товара s-го вида из r-й группы;
b_{rs}^k — норма площади k-го вида, необходимой для осуществления продажи единицы товара s-го вида из r-й группы;
b_{rs}^h — норма расхода h-го вида издержек обращения в денежном выражении при реализации единицы s-го вида товара из r-й группы;
x_{rs} — искомый объем продажи s-го вида товаров из r-й группы.

Тогда модель планирования хозяйственной деятельности предприятия состоит в определении таких $x_{rs} \geqslant 0$ ($s = 1, 2, \ldots, S_r$; $r = 1, 2, \ldots, R$), при которых достигается максимальная прибыль

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{s=1}^{S_r} P_{rs} x_{rs} \to \max$$

и выполняются ограничения: по имеющимся трудовым ресурсам

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{s=1}^{S_r} b_{rs}^l x_{rs} \leqslant b_l \quad (l = 1, 2, \ldots, L),$$

по имеющимся видам площадей

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{s=1}^{S_r} b_{rs}^k x_{rs} \leqslant b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, K),$$

по имеющимся видам издержек обращения

$$\sum_{r=1}^{R} \sum_{s=1}^{S_r} b_{rs}^h x_{rs} \leqslant b_h \quad (h = 1, 2, \ldots, H),$$

по объему товарооборота

$$Q_1 \leqslant \sum_{r=1}^{R} \sum_{s=1}^{S_r} q_{rs} x_{rs} \leqslant Q_2,$$

по выполнению плана ассортимента товаров

$$\alpha_{rs} \leqslant x_{rs} \leqslant \beta_{rs}.$$

Решая полученную модель как задачу линейного программирования, получаем оптимальный план реализации товаров x_{rs} и товарооборота $Q = \sum_{r=1}^{R} \sum_{s=1}^{S_r} q_{rs} x_{rs}$. Прибыль торгового предприятия равна разности между

валовым доходом и издержками обращения. Валовой доход измеряется суммой торговых скидок, составляющих определенный процент от различной цены товара, т. е. прибыль

$$P_{rs} = \lambda_{rs} q_{rs} - C_{rs} \quad (s = 1, 2, \ldots, S_r; \quad r = 1, 2, \ldots, R),$$

где λ_{rs} — торговая скидка; C_{rs} — суммарные издержки обращения на единицу s-го вида товара из r-й группы.

В модели планирования хозяйственной деятельности предприятия можно использовать критерий товарооборота с учетом ограничений на ресурсы и ассортимент реализуемых товаров.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНА ОТРАСЛЕВОГО РАЗВИТИЯ ТОРГОВЛИ

Определить оптимальный объем и структуру розничного товарооборота по республикам при выделяемых ограниченных ресурсах.

Введем обозначения:

t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
i — номер республики;
m — число союзных республик;
j — номер товарной группы;
n — число всех товарных групп;
Q_{ijt} — наименьшее значение товарооборота в i-й республике по j-й товарной группе в t-м году;
R_{it} — лимит по трудовым ресурсам i-й республики в t-м году;
K_{it} — лимит по капитальным вложениям i-й республики в t-м году;
H_{it} — валовой доход i-й республики в t-м году;
C_{it} — издержки обращения i-й республики в t-м году;
V_{it} — нерабочее время, расходуемое населением в сфере торгового обслуживания i-й республики в t-м году;
r_{ijt} — норматив трудоемкости в i-й республике на единицу товарооборота по j-й товарной группе в t-м году;
K_{ijt} — норматив капиталоемкости в i-й республике на единицу товарооборота по j-й товарной группе в t-м году;
h_{ijt} — норматив торговых наценок в i-й республике на единицу товарооборота по j-й товарной группе в t-м году;
C_{ijt} — норматив издержкоемкости в i-й республике на единицу товарооборота по j-й товарной группе в t-м году;
V_{ijt} — норматив затрат нерабочего времени населения для покупки товаров в i-й республике на единицу товарооборота по j-й товарной группе в t-м году;
a_{ijt} — коэффициент соизмерения полезности часа внерабочего времени, затрачиваемого населением при приобретении товара j-й товарной группы в i-й республике в t-м году;
x_{ijt} — объем розничного товарооборота в i-й республике по j-й товарной группе в t-м году.

Математическая модель. Найти минимум затрат (издержки обращения, капитальные вложения, стоимость потерь времени населением на приобретение товаров)

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (C_{ijt} + K_{ijt} + a_{ijt} V_{ijt}) \, x_{ijt} \to \min$$

при ограничениях: на трудовые ресурсы

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ijt}x_{ijt} \leqslant R_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad t = 1, 2, \ldots, T),$$

на капитальные вложения

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ijt}x_{ijt} \leqslant K_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad t = 1, 2, \ldots, T),$$

на валовой доход

$$\sum_{j=1}^{n} h_{ijt}x_{ijt} \leqslant H_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad t = 1, 2, \ldots, T),$$

на издержки обращения

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ijt}x_{ijt} \leqslant C_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad t = 1, 2, \ldots, T),$$

на нерабочее время населения, расходуемое на покупки

$$\sum_{j=1}^{n} V_{ijt}x_{ijt} \leqslant V_{it} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad t = 1, 2, \ldots, T),$$

на планируемый объем товарооборота

$$x_{ijt} \geqslant Q_{ijt} \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad t = 1, 2, \ldots, T).$$

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАБОЧИХ И СЛУЖАЩИХ ПО РАЗМЕРАМ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ

Определить удельные веса рабочих и служащих, получающих заработную плату определенного размера, и составить прогноз этих значений на плановый период.

Введем обозначения:

i — номер интервала значений заработной платы рабочих и служащих;
m — число всех интервалов;
M — максимальный размер заработной платы;
t — номер года;
x_i — средняя заработная плата i-го интервала;
P_{it} — удельный вес рабочих и служащих, получающих заработную плату по размерам i-го интервала в t-м году;

Тогда считается, что распределение рабочих и служащих по размерам заработной платы подчиняется логарифмически нормальному закону

$$P_{it} = \frac{1}{x_i\sigma_t\sqrt{2\pi}} e - \frac{(\ln x_i - \alpha_t)^2}{2\sigma_t^2},$$

где

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^{m} P_{it} \ln x_i \quad (t = 1, 2, \ldots); \qquad \sigma_t = \sum_{i=1}^{m} [\ln x_i - \alpha_t]^2 P_{it} \quad (t = 1, 2, \ldots);$$

$$x_i = \frac{M}{2m}(2i - 1) = \frac{M}{m}\left(i - \frac{1}{2}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Для получения прогнозов для P_{it} на плановый период используют информацию за прошлые n лет, вычисляют значения α_t и σ_t для $t = 1, 2, ..., n$, затем по методу наименьших квадратов определяют параметры a, b, c, d, g для зависимостей $\alpha_t = a + bt$, $\sigma_t = c + dt + gt^2$ и затем, подставляя сюда значение t для планового года, получают α_t и σ_t для планового года. Наконец по формуле логарифмически нормального закона получают P_{it} — прогноз распределения рабочих и служащих по размерам заработной платы на плановый период. Если известно плановое значение средней заработной платы a_t в t-м году планового периода, то достаточно получить прогноз для α_t по формуле $\alpha_t = a + bt$, а затем вычислить значения σ_t по формуле $\sigma_t = \left(\frac{\ln a_t - \alpha_t}{1,1513}\right)^{\frac{1}{2}}$.

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАСЕЛЕНИЯ ПО РАЗМЕРАМ ДОХОДОВ

Повышение жизненного уровня населения приводит к снижению удельного веса населения с малым доходом и увеличению удельного веса населения с бóльшим доходом. Это следует отразить при определении прогнозов удельного веса населения, получающего определенный доход.

Введем обозначения:

i — номер интервала доходов;
m — число всех интервалов;
x_i — средний доход населения, соответствующий i-му интервалу;
t — номер года;
n — число лет базового предпланового периода ($t = n + 1$, $n + 2, ...$, ..., $n + T$ — годы планового периода);
P_{it} — фактический удельный вес населения, получающего доход из i-го интервала в t-м году;
$Q_i(t)$ — теоретическое значение удельного веса населения, получающего доход, соответствующий i-му интервалу в t-м году.

При небольших значениях i удельный вес $P_i(t)$ части населения, получающей доход в пределах i-го интервала, убывает при увеличении t; для средних величин i величина $P_i(t)$ с ростом t сначала убывает, а затем увеличивается; для остальных i величина $P_i(t)$ с ростом t незначительно увеличивается. Этот процесс можно приближенно отразить функцией

$$Q_i(t) = a_i/t^2 + b_i/t + c_i,$$

где a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) — параметры.

Эти параметры определяют в результате решения следующей задачи:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} [Q_i(t) - P_{it}]^2 \to \min$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i(t) = 1 \quad (t = n + 1, \ldots, n + T);$$

$$Q_i(t) \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ t = 1, 2, \ldots, n + T).$$

Эта модель является задачей квадратичного программирования, и ее решение дает значения a_i, b_i, c_i. Таким образом, определяют теоретические значения $Q_i(t)$ для удельных весов части населения $P_i(t)$, получающей доход в соответствии с i-м интервалом в t-м году. Для планового периода $P_i(t) = Q_i(t)$ ($t = n + 1, ..., n + T$) и по этой формуле вычисляют распределение населения по размерам доходов.

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТЕЙ БАЛАНСА ДЕНЕЖНЫХ ДОХОДОВ И РАСХОДОВ НАСЕЛЕНИЯ

На определенном уровне получают размер статьи баланса денежных доходов и расходов населения в плановом периоде,а затем эти статьи распределяют по объектам низшего уровня.

Введем обозначения:

i — номер республики;
n — число республик;
t — номер года;
m — число лет базового периода;
T — число лет планового периода;
R_{it} — денежный доход (расход) по определенной статье i-й республики в t-м году (для $t = 1, 2, ..., m$ значение R_{it} известно, а для $t = m + 1, ..., m + T$ его надо определить);
R_t — денежный доход (расход по определенной статье в t-м году в целом по народному хозяйству считается известным для $t = 1, 2, ..., m + T$);
P_{it} — удельный вес доходов (расходов) по определенной статье i-й республики в t-м году, т. е. $P_{it} = R_{it}/R_t$ $(i = 1, 2, ..., m;\ t = 1, 2, ..., m + T)$;
$Q_i(t, a^i)$ — функция от t известного вида с неопределенными параметрами $a^i = (a_1^i, a_2^i, ..., a_{ki}^i)$. Эти функции выражают тенденцию изменения удельного веса P_{it} для i-й республики в t-м году.

Тогда модель состоит в нахождении таких $a_1^i, a_2^i, \ldots, a_k^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при которых достигается минимум суммы квадратов относительных отклонений теоретических значений удельных весов $Q_i(t, a^i)$ от фактических P_{it}

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{P_{it}^2}[Q_i(t, a^i) - P_{it}]^2 \to \min$$

при условиях:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i(t, a^i) = 1 \quad (t = m+1, \ldots, m+T);$$

$$Q(t, a^i) \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots, m+T).$$

Если $Q_i(t, a^i) \geqslant 0$ $(t = 1, 2, \ldots, m+T;\ i = 1, 2, \ldots, n)$, то поставленную задачу можно решить методом Лагранжа, т. е. неизвестные a^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяют из условий минимума функции

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{P_{it}^2}[Q_i(t, a^i) - P_{it}]^2 + \sum_{t=m+1}^{m+T}\lambda_t\left[\sum_{i=1}^{n} Q_i(t, a^i) - 1\right] \to \min,$$

где λ_t $(t = m+1, \ldots, m+T)$ — неизвестные множители Лагранжа. В общем виде такая задача решается сложно. При некоторых предложениях относительно вида функций $Q_i(t, a^i)$ решение этой задачи упрощается. Так, при линейной зависимости $Q_i(t, a^i)$ от $a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{ki}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ эту задачу можно свести к решению системы линейных нормальных уравнений.

Найдя $a^i (i = 1, 2, \ldots n)$, подставляют их значения в $Q_i(t, a^i)$ и определяют значение удельного веса P_{it} в плановом периоде по формуле

$$P_{it} = Q(t, a^i) \ (i = 1, 2, \ldots, n; \ t = m+1, \ldots, m+T),$$

а затем рассчитывают денежный доход (расход) данной статьи по формуле

$$R_{it} = R_t P_{it} \ (i = 1, 2, \ldots, n; \ t = m+1, \ldots, m+T).$$

Получив распределение статьи доходов (расходов) по республике, аналогично можно провести расчеты для определения этой статьи по областям республики.

Пример 20. Пусть при распределении статьи доходов по республикам функции $Q_i(t, a^i)$ имеют вид квадратичной зависимости

$$Q_i(t, a^i) = a_1^i + a_2^i t + a_3^i t^2,$$

тогда функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{P_{it}} [a_1^i + a_2^i t + a_3^i t^2 - P_{it}]^2 + \sum_{t=m+1}^{m+T} \lambda_t \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{n} (a_1^i + a_2^i t + a_3^i t^2) - 1\right] \to \min.$$

Для получения системы нормальных линейных уравнений относительно a_1^i, a_2^i, a_3^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ найдем частные производные по L и приравняем их к нулю

$$\frac{\partial L}{\partial a_j^i} = 2 \sum_{t=1}^{m} \frac{1}{P_{it}^2} [a_1^i + a_2^i t + a_3^i t^2 - P_{it}] \, t^{j-1} + \sum_{t=m+1}^{m+T} \lambda_t t^{j-1} = 0,$$

где степень $j = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\partial L / \partial \lambda_t = \sum_{i=1}^{n} (a_1^i + a_2^i t + a_3^i t^2) - 1 = 0 \ (t = m+1; \ m+2, \ldots, m+T).$$

Эта система линейных уравнений в нормальном виде имеет следующий вид:

$$a_1^i \sum_{t=1}^{m} \frac{2t^{j-1}}{P_{it}^2} + a_2^i \sum_{t=1}^{m} \frac{2t^j}{P_{it}^2} + a_3^i \sum \frac{2t^{j+1}}{P_{it}^2} + \sum_{t=m+1}^{m+T} \lambda_t t^{j-1} = \sum_{t=1}^{m} \frac{2t^{j-1}}{P_{it}}$$

$$(j = 1, 2, 3; \ i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_1^i + a_2^i t + a_3^i t^2) = 1 \ (t = m+1, \ldots, m+T).$$

Для ее решения можно применить известные общие методы. Баланс денежных доходов и расходов населения является составной частью планового баланса народного хозяйства и используется для установления соответствия между денежными доходами населения и потреблением товаров. Так, на основе имеющихся данных о мощностях рассчитывают, какое количество товаров можно произвести. Если спрос превышает возможности производства, то определяют потребность в дополнительных мощностях. При низком спросе на товары разрабатывают мероприятия, способствующие его повышению (объем сокращения производства, изменение цен, доходов и т. д.).

МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СПРОСА НА ТОВАРЫ ДЛИТЕЛЬНОГО ПОЛЬЗОВАНИЯ

Моделирование спроса с помощью логистической функции. Спрос на многие товары с течением времени возрастает: сначала медленно, затем быстро и, наконец, снова замедляется за счет насыщения. Это значит, что скорость увеличения спроса прямо пропорциональна обеспеченности и насыщению товаром. Для построения модели введем обозначения:

t — время;
y — обеспеченность товаром (удельный вес семей или людей, владеющих данным товаром);
A — насыщенность товаром (предельное значение обеспеченности товаром);
k — коэффициент пропорциональности.

Тогда зависимость обеспеченности от времени выражается дифференциальным уравнением

$$dy/dt = ky(A - y),$$

т. е. скорость увеличения обеспеченности dy/dt пропорциональна достигнутой обеспеченности y и необеспеченности $(A - y)$. Отсюда следует, что при малых и больших значениях y скорость роста обеспеченности будет малой. Коэффициент k и насыщенность A определяют следующим образом. Пусть известны значения обеспеченности y_t за прошлые годы $t = 1, 2, \ldots, m$. Дифференциальное уравнение перепишем в виде

$$\Delta y t / \Delta t = kAy_t - ky_t^2.$$

Принимая $\Delta t = 1$ и обозначая $kA = b$, получаем: $\Delta y_t = by_t + ky_t^2$.

Теперь для определения b и k используют метод наименьших квадратов

$$L = \sum_{t=1}^{m} \left(\Delta y_t - by_t - ky_t^2\right)^2 \to \min.$$

Дифференцированием L по b и k получим

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 2\sum_{t=1}^{m} \left(\Delta y_t - by_t - ky_t^2\right)(-y_t) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = 2\sum_{t=1}^{m} \left(\Delta y_t - by_t - ky_t^2\right)\left(-y_t^2\right) = 0,$$

отсюда формируем систему нормальных линейных уравнений

$$b\sum_{t=1}^{m} y_t^2 + k\sum_{t=1}^{m} y_t^3 = \sum_{t=1}^{m} y_t \Delta y_t;$$

$$b\sum_{t=1}^{m} y_t^3 + k\sum_{t=1}^{m} y_t^4 = \sum_{t=1}^{m} y_t^2 \Delta y_t.$$

Решая эту систему, определяем b и k, а затем находим $A = b/k$. Для определения y решаем уравнение

$$dy/y(A - y) = kdt,$$

и получаем решение в виде логистической функции

$$y = A/(1 + Ce^{-kAt}),$$

в которой параметры A и k определены по методу наименьших квадратов. Для нахождения постоянной C можно потребовать, чтобы функция проходила через последнюю точку, т. е. выполнялось условие

$$y_m = A/(1 + Ce^{-kAm}).$$

Решая последнее уравнение относительно C, получаем:

$$C = A - y_m e^{kAm}/y_m.$$

Окончательно получим формулу зависимости спроса от времени

$$y = \frac{Ay_m}{y_m + (A - y_m)\, e^{-kA(t-m)}}.$$

Прогнозы спроса получают при подстановке в эту формулу значений $t > m$.

Моделирование спроса с помощью логарифмически нормального закона. В основе такой модели используется гипотеза о том, что обеспеченность товаром y подчиняется интегральному логарифмически нормальному закону

$$y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{(\ln z - \alpha)^2}{2\sigma^2}}\, dz,$$

где $y(t)$ — обеспеченность товаром к моменту времени t; α, σ — неопределенные параметры функции.

Очевидно для этой гипотезы при всех t должны выполняться неравенства $0 \leqslant y(t) \leqslant 1$. Чтобы пользоваться формулой интегрального логарифмически нормального закона, надо определить параметры α и σ. С этой целью делают замену переменных $x = (\ln z - \alpha/\sigma)$, тогда получают

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x = \frac{\ln t - \alpha}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

В этой формуле выражение справа является интегралом Гаусса, для которого составлены таблицы значений.

Для определения α и σ применяют формулу

$$x_t = (\ln t - \alpha)/\sigma.$$

Зная значения $y(t)$ за прошлые годы $t = 1, 2, \ldots, m$, из таблиц для интеграла Гаусса находят $x_t (t = 1, 2, \ldots, m)$. Обозначив $a = 1/\sigma$; $b = \alpha/\sigma$, получают $x_t = a \ln t - b$.

Применяя метод наименьших квадратов, находят такие a и b, при которых

$$\sum_{t=1}^{m} (a \ln t - b - x_t)^2 \to \min.$$

Затем находят $\sigma = 1/a$; $\alpha = b\sigma = b/a$.
Тогда получают известную функцию, с помощью которой можно определить прогноз обеспеченности $y(t)$ при $t > m$.

Можно также решать задачу определения номера года t_1, в котором обеспеченность достигает заранее заданного значения. Для этого считается известным $y(t_1) = y_1$, затем по таблицам для интеграла Гаусса находят x_{t_1}

и, наконец, находят t_1, $t_1 = e^{\alpha+\beta x_{t_1}}$. Этот метод можно использовать и в том случае, когда обеспеченность $y(t) > 1$, но для этого надо знать предельное значение обеспеченности и в качестве $y(t)$ рассматривать $y(t)/A$.

Определение спроса на основе анкетных опросов. Этот метод использует анкеты, содержащие сведения о желаемой очередности покупок определенного набора товаров, а также данные о реальной очередности покупок этих товаров в прошлом. На основании этих данных определяют вероятности P_{ij} того, что i-й товар будет куплен j-м по очередности, т. е. получают квадратную матрицу вероятностей $P = (P_{ij})$. Затем определяют удельный вес покупателей s_i, имеющих в наличии i видов товаров ($i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$).

Назовем емкостью рынка набор вероятностей r_i того, что покупатель, приобретая какой-либо товар, купит именно i-й товар. Обозначим через S и R соответственно вектор-столбцы удельных весов S и емкостей рынка R

$$S = \begin{Vmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{Vmatrix}, \qquad R = \begin{Vmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{Vmatrix}.$$

Тогда емкость рынка $R = PS$.

Зная емкость рынка R, можно определить спрос на товары.

Пример 21. На основе анкет определена матрица вероятностей очередности покупок трех видов товаров: 1 — стиральные машины, 2 — холодильники, 3 — пылесосы. Кроме того, имеются данные об удельном весе этих товаров, имеющихся у покупателей,

$$P = \begin{Vmatrix} 0{,}90 & 0{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}02 & 0{,}20 & 0{,}78 \\ 0{,}07 & 0{,}80 & 0{,}13 \end{Vmatrix} \qquad S = \begin{Vmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}43 \\ 0{,}27 \end{Vmatrix},$$

тогда емкость рынка будет

$$R = \begin{Vmatrix} 0{,}90 & 0{,}04 & 0{,}06 \\ 0{,}02 & 0{,}20 & 0{,}78 \\ 0{,}07 & 0{,}80 & 0{,}13 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}43 \\ 0{,}27 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}90 \cdot 0{,}30 + 0{,}04 \cdot 0{,}43 + 0{,}06 \cdot 0{,}27 \\ 0{,}02 \cdot 0{,}30 + 0{,}20 \cdot 0{,}43 + 0{,}78 \cdot 0{,}27 \\ 0{,}07 \cdot 0{,}30 + 0{,}80 \cdot 0{,}43 + 0{,}13 \cdot 0{,}27 \end{Vmatrix} =$$
$$= \begin{Vmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}3 \\ 0{,}4 \end{Vmatrix}.$$

Итак, вероятность покупки стиральной машины равна 0,3; холодильника — 0,3; пылесоса — 0,4 при условии, что покупка будет совершена. Пусть известно число покупателей Q. Если считать, что покупатель обязательно купит хотя бы один их этих товаров, то спрос составит: на стиральные машины $0{,}3Q$, на холодильники $0{,}3Q$, на пылесосы $0{,}4Q$.

Для прогнозирования спроса и предложения на товары длительного пользования используют и другие методы прогнозирования, среди которых особенно следует отметить методы, основанные на определении зависимостей спроса от величины факторов, влияющих на образование спроса или предложения. Основные положения этих методов состоят в определении главных факторов, влияющих на спрос, значений этих факторов на прогнозируемый период и функции, выражающей зависимость спроса от главных факторов. Подбор главных факторов должны осуществлять специалисты (торговые работники, производственники, научные работники специальных институтов). Для выбора функции, выражающей зависимость спроса от факторов, можно применять многофакторные модели.

Пример 22. Так, для прогнозирования спроса на пылесосы использовались функции

$$y = A - e^{a+bx^i+cw^j+gz^k}; \quad y = a + bx^i + cw^j + gz^k,$$

где $i, j, k = \pm 1$; x — накопленный денежный доход населения; y — процент городского населения; z — индекс цен.

Заметим, что накопленный денежный доход в t-м году равен $x_t = x_1^0 + x_2^0 + \cdots + x_t^0$, где $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_t^0$ — денежный доход соответственно в 1-м, 2-м, ..., t-м году.

Определение научно обоснованного спроса на продукцию и особенно на товары народного потребления является сложной и очень важной задачей. Использование экономико-математических моделей и методов помогает решать эти задачи. Наиболее подходящими являются многофакторные модели. При использовании таких моделей необходимо, чтобы специалисты очень тщательно отобрали основные факторы, влияющие на спрос, и получили значения этих факторов в прогнозируемом периоде. Это также является сложной задачей, но от ее решения зависит успех применения моделей. Следует отметить также, что имеются и другие подходы, методы и способы для определения спроса. Однако они имеют свои недостатки. Поэтому целесообразно выбирать метод прогнозирования с учетом специфических особенностей отрасли и прогнозируемых показателей.

Глава 7

МОДЕЛИ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ

В народнохозяйственных планах и способах управления должны отражаться планомерность и пропорциональность развития экономики. Выбор оптимального варианта плана основывается на сопоставлении множества вариантов согласно критерию эффективности народнохозяйственных задач по определению общественных потребностей и возможностей их наиболее полного удовлетворения за счет имеющихся ресурсов. Наиболее широко используются модели межотраслевых балансов.

СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Определить балансовые соотношения для основных показателей развития народного хозяйства.

Введем обозначения:

i — номер производящей отрасли;
j — номер потребляемой отрасли;
n — число всех отраслей;
v_j — количество труда, идущее на изготовление продукции j-го вида;
m_i — чистый доход i-й отрасли;
y_i — конечный продукт i-й отрасли;
x_i — валовой продукт i-й отрасли;
x_j — валовой продукт j-й отрасли;
x_{ij} — часть i-го валового продукта, идущего на производство j-го вида продукции;
a_{ij} — коэффициенты прямых затрат, т. е. количество i-й продукции, идущей на производство единицы продукции j-го вида;
b_{ij} — коэффициенты полных затрат, т. е. норма полных затрат продукции i-го вида на производство единицы конечного продукта j-й отрасли.

Уравнения межотраслевого баланса следующие:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

или в стоимостном выражении

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + v_j + m_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Уравнение межотраслевого баланса с учетом коэффициентов прямых затрат

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, n).$$

Решение системы уравнений межотраслевого баланса следующее:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Система уравнений межотраслевого баланса является линейной, для ее решения можно применять метод Гаусса, Жордана-Гаусса или другие методы.

Пример 23. Определить объемы валовой продукции трех отраслей x_1, x_2, x_3, если известны значения конечного продукта $y_1 = 60$, $y_2 = 30$, $y_3 = 20$ и коэффициенты прямых затрат

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	0,40	0,20	0,30
$i=2$	0,15	0,25	0,10
$i=3$	0,10	0,15	0,20

Уравнения межотраслевого баланса следующие:

$$x_1 = 0{,}40x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 60; \quad x_2 = 0{,}15x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}10x_3 + 30;$$
$$x_3 = 0{,}10x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}20x_3 + 20.$$

Решение следующее: $x_1 = 160$, $x_2 = 80$, $x_3 = 60$.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Определить сбалансированные объемы выпускаемой продукции различных отраслей, ввод основных фондов, капитальные вложения по годам планового периода.

Введем обозначения:

t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
i, j — отрасль;
n — число всех отраслей;
x_i^t — валовой выпуск продукции i-й отрасли в t-м году;
y_i^t — конечный продукт i-й отрасли в t-м году;
a_{ij}^t — коэффициент прямых затрат i-й отрасли на производство единицы продукции j-й отрасли в t-м году;

K_i^t — продукция i-й отрасли, идущая на капитальные вложения в t-м году;

g_i^t — конечное потребление продукции i-й отрасли в t-м году;

K_{ij}^t — коэффициент прямых затрат продукции i-й отрасли на 1 руб. капитальных вложений в j-ю отрасль в t-м году;

$\Delta\Phi_j^t$ — потребность ввода в действие основных фондов j-й отрасли в t-м году;

Q_j^t — капитальные вложения в прирост незавершенного строительства j-й отрасли в t-м году;

R_j^t — прочие капитальные вложения, не увеличивающие стоимости основных производственных фондов (содержание временных построек, расходы на подготовку кадров и т. п.);

f_j^t — коэффициент фондоемкости, т. е. величина производственных фондов, приходящаяся на единицу продукции j-й отрасли в t-м году;

Φ_j^t — производственные фонды j-й отрасли на начало t-го года;

λ_j^t — коэффициент связи между объемом вводимых фондов j-й отрасли и их среднегодовой величиной в t-м году;

α_j^t — коэффициент ввода основных фондов, показывающий, сколько надо капитальных вложений для ввода основных фондов j-й отрасли в t-м году;

β_j^t — удельный вес прочих капитальных вложений R_j^t в общем объеме капитальных вложений j-й отрасли в t-м году.

Балансовые соотношения: для валовой продукции

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t x_j^t + y_i^t \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

для конечного продукта потребления и накопления

$$y_i^t = K_i^t + g_i^t \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

для капитальных вложений (межотраслевые потоки капитальных вложений)

$$K_i^t = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}^t K_j^t \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

для валовой, конечной продукции и капитальных вложений

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t x_j^t + \sum_{j=1}^{n} K_{ij}^t K_j^t + g_i^t \quad (t = 1, 2, \dots, T; \quad i = 1, 2, \dots, n),$$

для капитальных вложений и прироста основных фондов

$$K_j^t = \Delta\Phi_j^t + Q_j^t + R_j^t \quad (j = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

где потребность в основных фондах $\Delta\Phi_j^t = \dfrac{f_j^t x_j^t - \Phi_j^t}{\lambda_j^t}$ $(j = 1, 2, \dots, n;$ $t = 1, 2, \dots, T)$.

Капитальные вложения в прирост незавершенного строительства

$$Q_j^t = \alpha_j^t \Delta\Phi_j^t \quad (j = 1, 2, \dots, n; \quad t = 1, 2, \dots, T),$$

прочие капитальные вложения

$$R_j^t = \beta_j^t K_j^t \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \quad t = 1, 2, \ldots, T)$$

и таким образом, капитальные вложения

$$K_j^t = \frac{(f_i^t x_j^t - \Phi_j^t)(1 + \alpha_j^t)}{\lambda_j^t (1 - \alpha_j^t)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \quad t = 1, 2, \ldots, T),$$

объем основных фондов t-го года

$$\Phi_j^t = \Phi_j^{t-1} + \frac{f_i^t x_j^{t-1} - \Phi_j^{t-1}}{\lambda_j^t} \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \; t = 1, 2, \ldots, T).$$

Общий вид динамической модели межотраслевого баланса следующий:

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t x_j^t + \sum_{j=1}^{n} \frac{K_{ij}\,(f_i x_j^t - \Phi_j^t)(1 + \alpha_j^t)}{\lambda_j^t (1 - \beta_j^t)} + g_i^t$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad t = 1, 2, \ldots, T).$$

В модель межотраслевого баланса можно включить оборотные фонды

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t x_j^t + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^t x_j^t - \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^{t-1} x_j^{t-1} + y_i^t$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \; t = 1, 2, \ldots, T),$$

где e_{ij}^t — коэффициент оборотных фондов в t-м году (часть продукции i-й отрасли, идущей на оборотные фонды j-й отрасли, в расчете на единицу валовой продукции j-й отрасли); e_{ij}^{t-1} — коэффициент оборотных фондов в $(t-1)$-м году; x_j^{t-1} — валовая продукция j-й отрасли в $(t-1)$-м году.

МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА С УЧЕТОМ ЛАГА КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

Необходимо получить балансовые уравнения производства, распределение и потребление продукции с учетом запаздывания между освоением капитальных вложений и вводом основных фондов.

Введем обозначения:

i, j — отрасли народного хозяйства;
n — число всех отраслей народного хозяйства;
t — год планового периода;
T — число лет планового периода;
τ — лаг капитальных вложений, т. е. число лет, прошедших после освоения капитальных вложений до ввода основных фондов;
τ_j — наибольший лаг капитальных вложений в j-ю отрасль;
$K_j(t, \tau)$ — капитальные вложения в j-ю отрасль, осуществляемые в t-м году для ввода в действие основных фондов в $(t + \tau)$-м году;
$\Delta\Phi_j(t + \tau)$ — основные фонды, вводимые в j-ю отрасль в $(t + \tau)$-м году за счет капитальных вложений $K_j(t, \tau)$;
α_j — коэффициент временной структуры капитальных вложений;

a_{ij}^t — коэффициент прямых затрат i-й продукции на производство единицы продукции j-го вида в t-м году;
x_i^t — валовая продукция i-й отрасли в t-м году;
x_j^t — валовая продукция j-й отрасли в t-м году;
K_{ij}^t — коэффициент прямых затрат продукции i-й отрасли на 1 руб. капитальных вложений в j-ю отрасль в t-м году;
g_i^t — конечное потребление продукции i-й отрасли в t-м году;
$f_j^{t+\tau}$ — коэффициент фондоемкости j-й продукции в $(t+\tau)$-м году;
$\lambda_j^{t+\tau}$ — коэффициент связи между вводом основных фондов j-й отрасли и их среднегодовой величиной в t-м году;
$\Phi_j(t+\tau)$ — основные фонды j-й отрасли на начало $(t+\tau)$-го года.

Соотношение межотраслевого баланса следующее:

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t x_j^t + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{\tau_i} K_{ij}^t \alpha_j^{t\tau} \Delta\Phi_j(t+\tau) + g_i^t \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n; \\ t = 1, 2, \ldots, T \end{pmatrix},$$

где $\alpha_j^{t\tau} = \dfrac{K_j(t, \tau)}{\Delta\Phi_j(t+\tau)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots, T);$

$$\Delta\Phi_j(t+\tau) = \frac{f_i^{t+\tau} x_j^t - \Phi_j(t+\tau)}{\lambda_j^{t+\tau}} \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ t = 1, 2, \ldots, T).$$

МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОГО МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ, ЧТО ВСЕ КАПИТАЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ПРЕВРАЩАЮТСЯ В ОСНОВНЫЕ ФОНДЫ

Введем обозначения:

t — год планового периода;
Q — максимальное число лет освоения капитальных вложений;
τ — годы ввода основных фондов;
K^t — капитальные вложения в t-м году;
φ^τ — доля капитальных вложений, выделяемых в τ-м году и превращаемых в основные фонды в τ-м году;
Φ^t — основные фонды в t-м году;
H^t — незавершенное строительство в t-м году;
G^t — конечный продукт в t-м году;
A^t — матрица прямых затрат в t-м году;
D^t — матрица приростной фондоемкости в t-м году;
$\Delta\Phi^t$ — прирост основных фондов в t-м году;
Δx^t — прирост валовой продукции в t-м году;
x^t — валовая продукция в t-м году;
E — единичная матрица.

Тогда уравнение межотраслевого баланса

$$x^{t+1} = A^{t+1}x^{t+1} + \frac{1}{\varphi^0}\left[D^t \Delta x^t - \sum_{\tau=1}^{Q} \varphi^\tau K^{t-1-\tau}\right] + G^{t+1}.$$

При этом справедливо учитывать соотношения: по вводу фондов

$$K^t = \sum_{\tau=0}^{Q} \Phi^{t,\, t+\tau}; \quad \Phi^{t,\, t+\tau} = \varphi^\tau K^t; \quad \Phi^t = \sum_{\tau=0}^{Q} \varphi^\tau K^{t-\tau},$$

по незавершенному строительству

$$K^t = H^t + \Phi^t; \; H^t = \frac{1}{\varphi^0}\left[(1-\varphi^0)\,\Phi^t - \sum_{\tau=1}^{Q} \varphi^\tau K^{\;-\tau}\right].$$

Элементы матрицы приростной фондоемкости вычисляются по формуле

$$d^t_{ij} = \Delta\Phi^t_{ij}/\Delta x^t_j,$$

где $\Delta\Phi^t_{ij}$ — прирост основных фондов j-й отрасли за счет конечного продукта i-й отрасли в t-м году; Δx^t_j — прирост валовой продукции j-й отрасли в t-м году. Остальные показатели

$$\Delta\Phi^t = D^t\Delta x^t; \quad \Phi^{t+1} = \Phi^t + \Delta\Phi^t; \quad K^{t+1} = \frac{1}{\varphi^0}\left[D^t\Delta x^t - \sum_{\tau=1}^{Q} \varphi^\tau K^{t+1-\tau}\right];$$

$$H^{t+1} = \frac{1}{\varphi^0}\left[(1-\varphi^0)\,D^t\Delta x^t - \sum_{\tau=1}^{Q} \varphi^\tau K^{t+1-\tau}\right],$$

где $x^t = \left(x^t_1, x^t_2, \ldots, x^t_j, \ldots, x^t_n\right)$ — вектор валового продукта; $K = \left(K^t_1, K^t_2, \ldots, K^t_j, \ldots, K^t_n\right)$ — вектор капитальных вложений; $H^t = \left(H^t_1, H^t_2, \ldots, H^t_j, \ldots, H^t_n\right)$ — вектор незавершенного строительства; $\Phi^t = \left(\Phi^t_1, \Phi^t_2, \ldots, \Phi^t_j, \ldots, \Phi^t_n\right)$ — вектор основных фондов; $G^t = \left(G^t_1, G^t_2, \ldots, G^t_j, \ldots, G^t_n\right)$ — вектор конечного потребления.

При решении этой системы межотраслевого баланса валовой продукт представляется в виде $x^{t+1} = x^t + \Delta x^t$ и считается известным x^t (можно считать так потому, что на начало планового периода при $t = 0$ x^t известно, затем определяется Δx^t и становится известным x^{t+1} и т. д.). Прирост Δx^t определяется по формуле

$$\Delta x^t = S\left[\frac{D^t S}{\varphi^0} - E\right]^{-1}(N - \Delta G^t),$$

где

$$S\,(E - A^{t+1})^{-1}; \; N = (E - A^{t+1})\,x^t + \frac{1}{\varphi^0}\sum_{\tau=1}^{Q} \varphi^\tau K^{t+1-\tau} - G^t;$$

$\Delta G^t = G^{t+1} - G^t$ — прирост конечного потребления.

Получив Δx^t и подставив их в вышеприведенные формулы, определяют значения Φ^{t+1}, K^{t+1}, H^{t+1}, x^{t+1} в $(t+1)$-м году. Так надо провести расчеты последовательно для $t = 1$, $t = 2$ и т. д. и получим решение задачи для всего планового периода.

Определить оптимальный план размещения производства, дающий минимум производственно-транспортных затрат и учитывающий межотраслевой баланс производства распределения и потребления продукции.

Введем обозначения:

i, j — номер производимой продукции;

r, s — районы производства и потребления продукции;

x_i^r — объем производства i-й продукции в r-м районе;

x_j^r — объем производства j-й продукции в r-м районе;

x_j^{rs} — объем перевозок j-й продукции из r-го района в s-й;

x_j^{sr} — объем перевозок j-й продукции из s-го района в r-й;

a_{ij}^r — прямые затраты i-й продукции на производство единицы j-й продукции в r-м районе;

g_i^r — конечное потребление i-й продукции в r-м районе;

C_i^r — затраты на производство единицы продукции i-го вида в r-м районе;

a_{ij}^{sr} — затраты i-й продукции на перевозку единицы j-й продукции из s-го района в r-й;

b_i^r — потребность i-й продукции в r-м районе;

b_i^s — потребность i-й продукции в s-м районе;

K^r — выделяемые капитальные вложения для r-го района;

h_i^r — капитальные вложения на развитие транспорта в r-м районе за счет использования i-й продукции;

n_i^r — капитальные вложения на прирост единицы i-й продукции в r-м районе;

N_i^r — мощность по выпуску i-й продукции в r-м районе на начало планового периода;

T_j^r — потребности в рабочей силе на производство единицы продукции j-го вида в r-м районе;

t_j^{rs} — лимит на трудовые ресурсы в r-м районе;

t_j^{rs} — затраты труда на перевозку единицы продукции j-го вида из r-го района в s-й;

t_j^{sr} — затраты труда на перевозку продукции j-го вида из s-го района в r-й;

M_j^{rs} — максимально возможная пропускная способность транспортной сети r-го района относительно перевозок j-й продукции в s-й район;

M_j^{sr} — максимально возможная пропускная способность транспортной сети s-го района относительно перевозок j-й продукции в r-й район;

m_{ij}^{rs} — затраты i-й продукции на увеличение перевозок единицы j-й продукции из r-го в s-й район;

m_{ij}^{sr} — затраты i-й продукции на увеличение перевозок единицы j-й продукции из s-го в r-й район.

Математическая модель. Найти минимум затрат на производство и транспортировку продукции

$$\sum_r \sum_i C_i^r x_i^r + \sum_r \sum_s \sum_i \sum_j \left(a_{ij}^{rs} x_j^{rs} + a + a_{ij}^{sr} x_j^{sr}\right) \to \min$$

при ограничениях: на потребность в продукции

$$\sum_{s \neq r} x_i^{sr} = b_i^r; \quad \sum_r x_i^{rs} = b_i^s,$$

на капитальные вложения

$$\sum_i \left[n_i^r \left(x_i^r - N_i^r\right) + h_i^r\right] \leqslant K^r,$$

на трудовые ресурсы

$$\sum_j T_j^r x_j^r + \sum_j \sum_s t_j^{rs} x_j^{rs} + \sum_j \sum_s t_j^{sr} x_j^{sr} \leqslant T^r,$$

на балансовые соотношения

$$x_i^r = \sum_j a_{ij}^r x_j^r + \sum_{s \neq r} x_i^{rs} - \sum_{r \neq s} x_i^{sr} + \sum_j \sum_s x_j^{rs} \left(a_j^{rs} + t_j^{rs}\right) +$$
$$+ \sum_j \sum_s x_j^{sr} \left(a_{ij}^{sr} + t_j^{sr}\right) + \sum_j \sum_s m_{ij}^{rs} \left(x_j^{rs} - M_j^{rs}\right) +$$
$$+ \sum_j \sum_s m_{ij}^{sr} \left(x_j^{sr} - M_j^{sr}\right) + n_i^r \left(x_i^r - N_i^r\right) + g_i^r,$$

на неотрицательность переменных

$$x_i^r \geqslant 0; \quad x_j^{rs} \geqslant 0; \quad x_j^{sr} \geqslant 0.$$

МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

Балансовая модель ценообразования. Определить сбалансированные цены на продукцию различных отраслей.

Введем обозначения:

i, j — вид продукции (отрасли);
m — число всех видов продукции;
b_i — стоимость всех видов ресурсов, на которые уже цена определена, но идущие на производство единицы i-й продукции;
g_i — добавленная (вновь созданная) стоимость на единицу продукции i-го вида;
c_{ij} — норма расхода j-й продукции на единицу i-й продукции;
x_i — цена единицы продукции i-го вида;
x_j — цена единицы продукции j-го вида.

Балансовые соотношения для цен следующие:

$$x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + b_i + y_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Решая эту систему линейных уравнений, можно получить цены на продукцию.

Модель для определения индексов цен на продукцию. Необходимо определить изменение цен на продукцию по годам планового периода.

Введем обозначения:

i, j — вид продукции;

m — число всех видов продукции;

t — год планового периода;

$t = 0$ — отчетный год;

T — число лет планового периода;

I_i^t — индекс цены на i-ю продукцию в t-м году;

x_i^0 — валовой выпуск i-й продукции в отчетном году, вычисленный в действующих оптовых ценах без налога с оборота;

a_{ij}^t — коэффициент прямых материальных затрат i-й продукции в t-м году на производство единицы j-й продукции;

b_{ij}^t — коэффициент амортизации орудий и средств труда j-й отрасли на производство единицы i-й продукции в t-м году;

v_i^t — заработная плата i-й отрасли в t-м году;

u_i^t — отчисление на страхование в i-й отрасли в t-м году;

w_i^t — прибыль (добавочный продукт) i-й отрасли в t-м году;

x_i^t — валовой выпуск продукции i-й отрасли в t-м году, оцененный в действующих оптовых ценах без налога с оборота.

Для определения валовых выпусков продукции используют уравнения межотраслевого баланса

$$x_i^t = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^t x_j^t + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j^t + v_i^t + u_i^t + w_i^t \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m; \\ t = 0, 1, 2, \ldots, T \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему уравнений для каждого $t = 1, 2, \ldots, T$, получают значения валовых выпусков продукции и вычисляют индексы цен по формуле

$$I_i^t = x_i^t / x_i^0.$$

Если обозначить x_{ik}^t — валовой выпуск k-й продукции i-й отрасли в t-м году; P_k^t — цена единицы продукции k-го вида в t-м году, то индекс цен

$$I_i^t = \sum_k x_{ik}^t P_k^t / \sum_k x_{ik}^0 P_k^0.$$

Балансовая модель территориальной дифферениации цен. Многие виды продукции производятся в различных районах. Экономические показатели производства зависят от местных условий, что влияет в первую очередь на себестоимость производимой продукции. Для обеспечения рентабельности производства необходимо определять цены на производимую продукцию в зависимости от района. Чтобы обеспечить рентабельное производство, необходим учет территориальной дифференциации цен. Цены в большей степени должны отражать общественно необходимые затраты труда, определяемые различными природными условиями и технико-экономической оснащенностью производства, обеспечивая каждому предприятию возмещение издержек производства и прибыль. С целью получения научно обоснованных цен на продукцию необходимо учесть затраты на производство и прибавочный продукт.

Введем обозначения:

i — номер вида продукции;
m — число видов продукции;
k — номер района, где производится продукция;
N — число всех районов;
j — вид продукции, сырья, ресурсов, потребляемых в производстве;
M — число всех видов ресурсов;
l — номер района, где производятся поставляемые ресурсы;
z — число всех предприятий, производящих ресурсы;
a_{ijlk} — норма потребления j-го ресурса, произведенного в l-м районе для производства единицы продукции i-го вида в k-м районе;
C_{jlk} — стоимость перевозки единицы j-го ресурса из l-го района в k-й;
y_{ik} — прибыль на единицу продукции i-го вида, произведенной в k-м районе;
x_{ik} — цена единицы продукции i-го вида, произведенной в k-м районе;
x_{jlk} — цена единицы ресурса j-го вида в k-м районе, но произведенного в l-м районе.

Часть продукции, которая производится на заводах данного района ($k = 1, 2, \ldots, N$), может потребляться как сырье при производстве продукции на этих же заводах. Поэтому такая продукция рассматривается как сырье, вид которого будем нумеровать числами $j = 1, 2, \ldots m$. Остальные виды ресурсов: сырье, топливо, финансы, зарплата и т. д. нумеруем числами $j = m + 1, m + 2, \ldots, M$.

Математическая модель состоит в определении цены

$x_{ik} (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, N);\ x_{jl} (j = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots, L)$

из системы уравнений

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{L} a_{ijlk} x_{jl} + \sum_{j=m+1}^{M} \sum_{l=1}^{L} a_{ijlk} x_{jl} + \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} a_{ijlk} C_{jlk} + y_{ik}.$$

Обозначив через b_{ik} известную стоимость ресурсов на производство единицы продукции i-го вида в k-м районе, получим

$$b_{ik} = \sum_{j=m+1}^{M} \sum_{l=1}^{L} a_{ijlk} x_{jl} + \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} a_{ijlk} C_{jlk}.$$

Система уравнений перепишется в виде

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{L} a_{ijlk} x_{jl} + b_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, N).$$

Если известные величины объединить $b_{ik} + y_{ik} = g_{ik}$, то система уравнений примет вид

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{L} a_{ijlk} x_{jl} + g_{ik} \quad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, N).$$

Эта система уравнений есть аналог балансовой модели производства и распределения продукции. Таким образом, для определения цен на продукцию x_{ik} надо решить систему линейных уравнений порядка mN.

Модели перехода типов цен. Рассматривают три типа цен: стоимостную цену, в которой накопление определяется в виде определенного процента от себестоимости; производственную цену, в которой накопление определяется в виде определенного процента от основных и оборотных фондов; произ-

водственно-стоимостную цену, в которой накопление определяется в виде определенного процента от суммы основных и оборотных фондов и фонда заработной платы. В модели приводят системы уравнений, дающие возможность перейти от стоимостной цены к производственной и производственно-стоимостной ценам.

Введем обозначения:

j — вид продукции (отрасли);
n — число видов продукции;
F_j — стоимость основных фондов j-й отрасли;
f_j — стоимость оборотных фондов j-й отрасли;
s_j — стоимость продукции j-й отрасли;
z_j — накопление j-й отрасли;
b — норма накопления по отношению к фондам (основным и оборотным);
x_j — коэффициент корректировки цены от стоимостного типа к производственному типу;
r_j — производственная цена продукции j-й отрасли;
p_j — производственно-стоимостная цена продукции j-й отрасли;
y_j — коэффициент перехода от стоимостной цены продукции к производственно-стоимостной цене j-й отрасли;
C — норма накопления по отношению к основным, оборотным фондам и фонду заработной платы;
h_j — стоимость экспорта j-й отрасли;
k_j — стоимость потребительских товаров j-й отрасли, предназначенных на конечное потребление;
d_j — часть продукции j-й отрасли, идущей на удовлетворение спроса, остающегося после исключения экспорта, и стоимости потребительских товаров;
u_j — фонд заработной платы j-й отрасли;
F_{ij} — стоимость основных фондов j-й отрасли, расходуемая на производство продукции i-й отрасли;
f_{ij} — стоимость оборотных фондов j-й отрасли, расходуемая на производство продукции i-й отрасли;
a_{ij} — прямые затраты j-й отрасли, расходуемые на производство продукции i-й отрасли;
v_j — сумма амортизации j-й отрасли;
t — коэффициент роста.

Тогда система уравнений для получения коэффициентов корректировки цены от стоимостной к производственной следующая:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ij} x_i \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Поскольку для получения ненулевого решения этой системы необходимо равенство нулю определителя системы, то добавляется еще одно уравнение, которое должно обеспечивать ненулевое (может быть единственное) решение

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i s_i = \sum_{i=1}^{n} s_i,$$

где

$$w_{ij} = \frac{1}{s_j}\left[a_{ij} + \frac{u_j k_j}{\sum_{j=1}^{n} u_j} + \frac{d_j h_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j} + \frac{v_j F_{ij}}{F_i} + b\,(F_{ij} + f_{ij})\right]; \qquad r_j = x_j s_j$$

Система уравнений для получения коэффициентов корректировки цены от стоимостной к производственно-стоимостной следующая:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} y_i \quad (j = 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Аналогично и в этом случае для получения ненулевого решения определитель системы должен равняться нулю, поэтому добавляется еще одно уравнение, которое должно обеспечить ненулевое неотрицательное решение (желательно единственное)

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = C \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \left(F_{ji} + f_{ij} + \frac{tu_j k_j}{\sum_{j=1}^{n} u_j} \right),$$

где

$$b_{ij} = \frac{1}{s_j} \left[a_{ij} + \frac{u_j k_j}{\sum_{j=1}^{n} u_j} + \frac{d_j h_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j} + \frac{v_j F_{ij}}{F_j} + C \left(F_{ij} + f_{ij} + \frac{tu_j k_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j} \right) \right]$$

$(i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$; $p_j = y_j s_j \quad (j = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$; $p_j = y_j s_j$.

МОДЕЛЬ СОЧЕТАНИЯ ПЛАНОВ РАЗВИТИЯ ОТРАСЛЕЙ И РАЙОНОВ

На основе разработанных планов развития и размещения производства отраслей согласовываются планы с интересами района, в которой будет осуществляться строительство новых предприятий данных отраслей.

Введем обозначения:

N — число предприятий, которые предполагается начать строить в данном районе;

j — номер предприятия ($j = 1,\ 2,\ \dots,\ N$);

Q_j — наиболее ранний год начала предполагаемого строительства j-го предприятия;

τ_j — наиболее поздний год предполагаемого строительства j-го предприятия;

T — период планирования развития района в годах;

t — номер года планируемого периода;

R — число местных нетранспортабельных ресурсов, имеющихся в районе и необходимых для строительства и эксплуатации предприятий (т. е. ресурсов, доставка которых в данный район практически либо невозможна, либо нецелесообразна. Например территория, водные ресурсы и др.);

r — номер вида такого ресурса ($r = 1,\ 2,\ \dots,\ R$);

S — число половозрастных групп трудовых ресурсов;

s — индекс половозрастной группы ($s = 1,\ 2,\ \dots,\ S$);

A_{rt} — максимально возможный объем ресурсов r-го вида, который можно выделить для обеспечения строительства и эксплуатации новых предприятий в t-м году планируемого периода (под новыми предприятиями понимают те, которые предполагается начать строить в планируемом периоде, в отличие от старых предприятий, уже функционирующих или начавших строиться к началу планируемого периода);

B_{st} — прогноз объема трудовых ресурсов s-й половозрастной группы района в t-м году;

C_{st} — объем трудовых ресурсов s-й половозрастной группы, необходимый для обеспечения старых предприятий в t-м году планируемого периода;

O_{st} — численность обучающихся с отрывом от производства s-й половозрастной группы трудовых ресурсов района в t-м году;

D_{st} — максимально возможное увеличение объема трудовых ресурсов s-й половозрастной группы в районе в t-м году, достигаемое за счет миграции населения в данный район;

M_{st} — максимальное число работающих s-й половозрастной группы, которых можно привлечь из других районов к временной работе в районе в t-м году;

G_{st} — максимально допустимое уменьшение объема трудовых ресурсов s-й половозрастной группы в районе в t-м году, достигаемое за счет миграции населения из других районов;

L_{st} — максимально допустимое число работающих s-й половозрастной группы, проживающих в данном районе, которых можно привлечь к работе в других районах временно в t-м году;

λ_s — естественно допустимая для района в каждом году планируемого периода минимальная доля временно работающих (включая занятых в домашнем хозяйстве) по отношению к объему трудовых ресурсов s-й половозрастной группы;

μ_s — естественно допустимая для района максимальная доля временно не работающих (включая занятых в домашнем хозяйстве) по отношению к объему трудовых ресурсов s-й половозрастной группы;

η_s, ξ_s — минимально и максимально возможные доли трудовых ресурсов s-й половозрастной группы в общем объеме трудовых ресурсов района;

α_{st} — затраты, связанные с переселением в данный район одного рабочего s-й половозрастной группы в t-м году;

β_{st} — затраты, связанные с привлечением на временную работу в районе одного рабочего (из других районов) s-й половозрастной группы в t-м году;

γ_{st} — затраты, связанные с переселением одного рабочего s-й половозрастной группы в t-м году в другие районы;

δ_{st} — затраты, связанные с привлечением на временную работу в других районах одного рабочего s-й половозрастной группы в t-м году;

φ_{st} — средние затраты на одного человека s-й половозрастной группы, связанные с удовлетворением культурных и бытовых потребностей населения в t-м году;

Δt — затраты, связанные с обеспечением культурных и бытовых потребностей нетрудоспособного населения района в t-м году;

h_t — доля затрат на обеспечение культурных и бытовых потребностей населения, осуществляемых за счет отчислений от прибыли функционирующих в районе предприятий в t-м году;

g_t — норматив отчислений от прибыли предприятий на обеспечение культурных и бытовых потребностей населения района в t-м году;

a_{jrl} — объем ресурсов r-го вида, необходимый для j-го предприятия в l-м году (считая от начала его строительства);

b_{jsl} — объем трудовых ресурсов s-й половозрастной группы, необходимый для j-го предприятия в l-м году (считая от начала его строительства);

K — число важнейших видов продукции, которые будут производиться на новых предприятиях;

k — номер вида продукции ($k = 1, 2, \ldots, K$);

d_{jkl} — объем производства продукции k-го вида на j-м предприятии в l-м году (считая от начала его строительства);

Q_{kt} — минимально необходимый объем производства продукции k-го вида на новых предприятиях района в t-м году;

P_{jl} — прибыль, получаемая от эксплуатации j-го предприятия в l-м году (считая от начала его строительства);

Π_t — прибыль, получаемая от эксплуатации старых предприятий района в t-м году планируемого периода;

f_j — показатель, характеризующий степень загрязнения окружающей среды j-м предприятием;

F — максимально возможная степень загрязнения среды в районе новыми предприятиями;

E — нормативный коэффициент.

Величины λ_s, μ_s, η_s, ξ_s рассчитывают предварительно для обеспечения такой половозрастной группы структуры населения, которая бы в наибольшей мере соответствовала нормальным условиям воспроизводства населения в данном районе.

Неизвестными в модели являются логические переменные x_{jt}, характеризующие возможность начала строительства j-го предприятия в t-м году планируемого периода.

$$x_{jt} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-й объект начинают строить в } t\text{-м году планируемого периода;} \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

y_{st}, u_{st} — необходимое увеличение, уменьшение объема трудовых ресурсов s-й половозрастной группы в районе в t-м году, достигаемое за счет миграции населения;

z_{st}, v_{st} — необходимое увеличение, уменьшение работающих s-й половозрастной группы района за счет временного использования в t-м году населения других районов;

w_{st} — численность временно не работающих s-й половозрастной группы (в том числе занятых в домашнем хозяйстве) в t-м году.

Математическая модель имеет вид:

1. Каждое предприятие можно начать строить лишь в течение предполагаемого отраслью периода, причем строительство можно начинать только один раз

$$\sum_{t=1}^{Q_j-1} x_{jt} = 0 \quad (j = \{1, 2, \ldots, N \mid Q_j > 1\}); \qquad \sum_{t=\tau_j+1}^{T} x_{jt} = 0$$

$$(j = \{1, 2, \ldots, N \mid \tau_j < T\}); \qquad \sum_{t=Q_j}^{\tau_j} x_{jt} \leqslant 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

2. Потребление новыми предприятиями ресурсов ограничено возможностями данного района

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{q=1}^{t} x_{jq} a_{jr,\, t+1-q} \leqslant A_{rt} \quad (r = 1, 2, \ldots, R;\ t = 1, 2, \ldots, T).$$

3. Строительство и эксплуатация предприятий должны быть обеспечены трудовыми ресурсами

$$C_{st} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=1}^{t} x_{jq} b_{jst+1-q} + w_{st} + O_{st} = B_{st} +$$

$$+ \sum_{q=1}^{t} (y_{sq} - u_{sq}) + z_{st} - v_{st} \quad (s = 1, 2, \ldots, S;\ t = 1, 2, \ldots, T).$$

4. Возможности по миграции населения и временному использованию работающих ограничены

$$0 \leqslant y_{st} \leqslant D_{st}; \quad 0 \leqslant z_{st} \leqslant M_{st}; \quad 0 \leqslant u_{st} \leqslant G_{st};$$
$$0 \leqslant v_{st} \leqslant L_{st} \quad (s = 1, 2, \ldots, S; \ t = 1, 2, \ldots, T).$$

5. Необходимо соблюдение нормальных для данного района пропорций в структуре населения

$$\lambda_s \left(B_{st} + \sum_{q=1}^{t} (y_{sq} - u_{sq}) + z_{st} - v_{st}\right) \leqslant w_{st} \leqslant \mu_s \left(B_{st} + \sum_{q=1}^{t} (y_{sq} - u_{sq}) + z_{st} - v_{st}\right) \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots, S; \\ t = 1, 2, \ldots, T \end{pmatrix};$$

$$\eta_s \sum_{s=1}^{s} \left(B_{st} + \sum_{q=1}^{t} (y_{sq} - u_{sq}) z_{st} - v_{st}\right) \leqslant B_{st} + \sum_{q=1}^{t} (y_{sq} - u_{sq}) + z_{st} - v_{st} \leqslant$$
$$\leqslant \xi_s \sum_{S=1}^{S} \left(B_{st} + \sum_{q=1}^{t} (y_{sq} - u_{sq}) + z_{st} - v_{st}\right) (s = 1, 2, \ldots, S;$$
$$t = 1, 2, \ldots, T).$$

6. Отчисления от прибыли предприятий на удовлетворение культурных и бытовых потребностей населения не должны быть меньше, чем требуется району

$$g_t = \left(\prod\nolimits_t + \sum_{l=1}^{N} \sum_{q=1}^{t} x_{jq} P_{j,\ t+1-q} \geqslant h_t \left(\Delta t + \sum_{s=1}^{S} \varphi_{st} \left(B_{st} + \sum_{q=1}^{t} (y_{sq} - u_{sq}) + z_{st} - v_{st}\right)\right) \quad (t = 1, 2, \ldots, T).$$

7. Новые предприятия должны выполнить плановые задания по выпуску важнейших видов продукции

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{q=1}^{t} x_{jq} d_{jk,\ t+q} \geqslant Q_{kt} \quad (k = 1, 2, \ldots, K; \ t = 1, 2, \ldots, T).$$

8. Необходимо учитывать возможности загрязнения предприятиями окружающей среды

$$\sum_{j=1}^{N} f_j \sum_{t=Q_j}^{\tau_j} x_{jt} \leqslant F.$$

9. Ограничения для формализации логических переменных

$$0 \leqslant x_{jt} \leqslant 1; \quad x_{jt} \text{ — целые} \quad (j = 1, 2, \ldots, N; \ t = 1, 2, \ldots, T).$$

10. В качестве критерия оптимальности выбирается требование максимизации приведенной к началу планирования прибыли, получаемой от эксплуатации всех имеющихся в районе объектов на протяжении планируемого периода (по аналогии с критериями максимизации величины приведенной прибыли).

После преобразований, исключающих постоянные величины, получена целевая функция

$$\rho = \sum_{t=1}^{T} (1+E)^{-t} \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=1}^{t} x_{jq} P_{j,\,t+1-q} - \sum_{t=1}^{T} (1+E)^{-t} \sum_{s=1}^{S} (\alpha_{st} y_{st} + \beta_{st} z_{st} + \gamma_{st} u_{st} + \delta_{st} v_{st}) - \sum_{t=1}^{T} (1+E)^{-t} \sum_{s=1}^{S} \varphi_{st} \Big(\sum_{q=1}^{t} (y_{sq} - u_{sq}) + z_{st} - v_{st} \Big) \rho \to \max.$$

Определяется дополнительное число предприятий n, которые можно начать строить в районе в предполагаемые для них сроки, по формуле

$$n = \sum_{j=1}^{N} \sum_{t=Q_j}^{\tau_j} x_{jt}.$$

Пусть x_{jt}^1, y_{st}^1, z_{st}^1, u_{st}^1, v_{st}^1, w_{st}^1, ρ^1, n^1 — решение задачи, тогда возможны следующие случаи:

1. $n' = N$. Это означает, что в районе можно начать строительство всех предприятий. При этом год начала строительства каждого из предприятий σ_j определяется по формуле

$$\sigma_j = \sum_{t=Q_j}^{\tau_j} t x_{jt}^1 \quad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

2. $n^1 < N$. Это означает, что строительство некоторых предприятий, а именно с такими номерами j, что $\sum_{t=Q}^{\tau_j} x_{jt}^1 = 0$, не может быть начато в районе в предполагаемые сроки. Поэтому для них необходимо либо рассмотреть возможность их строительства в других районах, либо пересмотреть сроки предполагаемого начала их строительства в данном районе.

МОДЕЛЬ ИТЕРАТИВНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ В МЕЖПРОДУКТОВОМ БАЛАНСЕ

На уровне Госплана получают список продуктов агрегированной номенклатуры и объем производства этих продуктов в предплановом году. В министерствах на основе этих данных и детализированных нормативов потребления продукции рассчитывают полуагрегированные нормативы (затраты продукции агрегированной номенклатуры на производство единицы продукции детализированной номенклатуры) и агрегированные нормативы (затраты продукции агрегированной номенклатуры на производство единицы продукции агрегированной номенклатуры отрасли). В Госплане на основе решения межотраслевого баланса по агрегированной номенклатуре получают план производства. В министерствах с помощью полуагрегированных нормативов осуществляют дезагрегирование и получают первое приближение плана производства в детализированной номенклатуре отрасли; далее производится пересчет полуагрегированных и агрегированных нормативов (Госплан передает в министерства агрегированный план производства, а министерства передают в Госплан скорректированные агрегированные нормативы).

Введем обозначения:

i, j — вид детализированной продукции;
N — число видов детализированной продукции;
p, q — вид агрегированной продукции;

n — число видов агрегированной продукции;
k — номер приближения плана;
a_{ij} — нормативы прямых затрат i-й отрасли на производство единицы j-й продукции;
A — матрица детализированных нормативов;
b_i — конечная продукция i-го вида;
x_i — объем валовой продукции i-го вида;
x_i^k — объем валовой продукции плана, полученного на k-м приближении;
g_{iq}^k — норматив прямых затрат i-й продукции детализированной номенклатуры на производство единицы q-й продукции агрегированной номенклатуры;
I_q — множество видов i детализированной номенклатуры, входящей в q-й агрегированный продукт;
z_q^k — валовой продукт агрегированной номенклатуры q-го вида;
h_{pq}^k — агрегированные нормативы прямых затрат p-й агрегированной продукции на единицу q-й агрегированной продукции;
B_q — конечная продукция q-го вида.

Процесс получения плана начинают с данных предпланового периода $k = 0$. Для k-го приближения:

1. На основе решения уравнений межотраслевого баланса для детализированной номенклатуры $x_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}x_j + b_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ получают валовые объемы производства продукции по детализированной номенклатуре.

2. Вычисляют полуагрегированные нормативы

$$g_{iq}^k = \frac{1}{z_q^k}\sum_{j\in I_q} a_{ij}x_j^k,\quad z_q^k = \sum_{j\in I_q} x_j^k \quad (i = 1, 2, \dots, N;\ q = 1, 2, \dots, n).$$

3. Вычисляют агрегированные нормативы

$$h_{pq}^k = \sum_{i\in I_p} g_{iq}^k \quad (p = 1, 2, \dots, n;\quad q = 1, 2, \dots, n).$$

4. Решают систему уравнений межотраслевого баланса

$$z_p^{k+1} = \sum_{q=1}^{n} h_{pq}^k z_q^{k+1} + B_p \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

где $B_p = \sum_{i\in I_p} b_i \quad (p = 1, 2, \dots, n)$.

5. Вычисляют $(k+1)$-е приближение плана

$$x_i^{k+1} = \sum_{q=1}^{n} g_{iq}^k z_q^{k+1} + b_i.$$

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА

В системе моделей развития народного хозяйства используют следующие обозначения:
L — общая численность населения;
A — численность работников, занятых в отраслях материального производства;

Z — фонд заработной платы;
F — ввод в действие основных производственных фондов;
K — капитальные вложения;
P — производительность труда;
S — затраты на образование;
D — амортизационные отчисления;
M — материальные затраты;
x — совокупный общественный продукт;
x_1 — валовая продукция промышленности;
x_2 — валовая продукция сельского хозяйства;
x_3 — валовая продукция строительства;
x_4 — валовая продукция торговли и общественного питания;
x_5 — валовая продукция внешней торговли;
x_6 — валовая продукция транспорта и связи;
x_7 — валовая продукция прочих отраслей;
i — номер отрасли;
H — национальный доход;
H_i — национальный доход, произведенный в i-й отрасли;
G — размер посевных площадей;
T — количество минеральных удобрений;
t — номер года;
α_i — лаг капитальных вложений или средний срок строительства объектов в i-й отрасли;
u — размер незавершенного строительства.

Система уравнений модели. В качестве регулирующих, ключевых факторов в системе выбраны: A, F, K, P и S. Значения этих факторов можно задать плановыми органами или получить с помощью прогнозных расчетов. Для каждого из них строят структурное уравнение регрессионного типа, в которое эти факторы входят в качестве определяемой функции. Таким образом, выражаются зависимости регулирующих переменных от других показателей согласно взаимосвязи между ними. В остальные уравнения модели ключевые показатели входят в качестве аргумента, от которого зависит значение соответствующего результирующего показателя. Необходимо выразить зависимость результирующих переменных (валовая продукция и национальный доход, созданный в отдельных отраслях) от регулирующих ключевых факторов. Путем варьирования последних осуществляется поиск наиболее целесообразных вариантов прогноза результирующих переменных, которые характеризуют развитие народного хозяйства.

Для этой цели сводные показатели, такие как объем производства совокупного общественного продукта и национального дохода в целом по народному хозяйству должны базироваться на самостоятельных прогнозах. Затем суммируют соответствующие отраслевые показатели валовой продукции и национального дохода и сопоставляют с численными значениями прогнозируемых сводных показателей.

Если окажется, что результаты частных прогнозов не сбалансированы и взаимно не согласованы, необходимо построить новую модель, с помощью которой можно произвести комплекс перспективных расчетов экономических показателей с требованием совпадения суммарных значений показателей валовой продукции и национального дохода по отраслям с величиной соответствующих сводных показателей республики.

Уравнения модели для расчета экономических показателей на перспективу:

1. Уравнения для определения ключевых переменных:

$$A_{it} = a_{0i} + a_{1i}L_t + a_{2i}Z_{it} + a_{3i}L_tZ_{it};$$

$$F_{it} = b_{0i} + b_{1i}F_{1,\,t-1} + b_{2i}H_t + b_{3i}U_{it} + b_{4i}U_{it}H_t;$$

$$K_{it} = d_{0i} + d_{1i}H_t + d_{2i}D_{it} + d_{3i}U_{it} + d_{4i}F_{it} + d_{5i}H_tU_{it} + \sum_{j=0}^{\alpha_i} d_{j+\sigma,i} K_{it-\alpha_i+j};$$

$$S_{it} = h_{0i} + h_{1i}H_t + \sum_{j=1}^{5} h_{j+2,\,i}F_{it-j};$$

$$P_{it} = r_{0i} + r_{1i}A_{it} + r_{2i}F_{it} + r_{3i}F_{it}S_{it} + \sum_{j=1}^{5} r_{j+3,\,i}S_{i,\,t-j}.$$

2. Уравнения для определения результирующих показателей:

$$x_{it} = q_{i0} + q_{i1}A_{it}P_{it} + q_{i2}F_{it}^{\tau_i} + q_{i3}z_{it}^{\varphi_i} + q_{i4}S_{it}^{\psi_i} + q_{i5}F_{it}Z_{it} + q_{i6}F_{it}S_{it}$$
$$(i = 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6);$$

$$x_{2t} = q_{20} + q_{21}A_{2t}P_{2t} + q_{22}F_{2t}^{\tau_2} + q_{23}Z_{2t}^{\varphi_2} + q_{24}S_{2t}^{\psi_2} + q_{25}G_{2t} + q_{26}F_{2t}Z_{2t} + q_{27}F_{2t}S_{2t};$$

$$x_{7t} = q_{70} + q_{71}A_{7t}P_{7t} + q_{72}F_{7t}^{\tau_7} + q_{73}Z_{7t}^{\varphi_7} + q_{74}S_{7t}^{\psi_7} + \sum_{i=1}^{6} q_{7,\,i+4}x_{it} + q_{7,\,11}F_{7t}Z_{7t} + q_{7,\,12}F_{7t}S_{7t};$$

где $\tau_i = \pm 1$, $\varphi_i = \pm 1$, $\psi_i = \pm 1$.

3. Уравнения для материальных затрат:

$$M_{it} = g_{i0} + \sum_{j=1}^{7} g_{ij}x_{jt} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 7).$$

5. Соотношения для национального дохода:

$$H_{it} = x_{it} - M_{it} \qquad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ 7).$$

5. Общий национальный доход

$$H_t = \sum_{i=1}^{7} H_{it} = \sum_{i=1}^{7} (x_{it} - M_{it}) = x_t - M_t,$$

где

$$x_t = \sum_{i=1}^{7} x_{it}; \qquad M_t = \sum_{i=1}^{7} M_{it}.$$

На вход модели поступают регулирующие и запаздывающие переменные. К запаздывающим переменным относят объемы основных производственных фондов предыдущего и предшествующих лет, объем капитальных вложений и затраты на образование прошлых лет и время.

Сводные уравнения для прогнозирования национального дохода, валового продукта и материальных затрат:

$$x_t = q_0 + q_1A_tP_t + q_2F_t^{\tau} + q_3Z_t^{\varphi} + q_4S_t^{\psi} + q_5F_tZ_t + q_6F_tS_t + q_7Z_7S_t;$$
$$M_t = g_0 + g_1x_t + g_2F_t^{\tau} + g_3Z_t^{\varphi} + g_4S_t^{\psi} + g_5F_tZ_t + g_6F_tS_t + g_7Z_tS_t$$
$$H_t = x_t - M_t,$$

где $\tau,\ \varphi,\ \psi = \pm 1$.

Коэффициенты a_{ij}, b_{jt}, d_{ji}, h_{ji}, r_{ji}, q_{ij}, g_{ij}, τ_i, φ_i, ψ_i, τ, φ, ψ определяют следующим образом. В уравнениях для определения ключевых переменных коэффициенты определяют по методу наименьших квадратов на основа-

нии статистических данных за m лет. При этом скорости роста численности работников отрасли A_t в зависимости от увеличения факторов могут иметь произвольные знаки, так как при увеличении численности всего населения не обязательно должен быть рост численности работников (рост L может быть за счет пенсионеров и детей), а увеличение фонда заработной платы может не повлечь увеличение численности работников из-за увеличения заработной платы работников. Поэтому коэффициенты a_{jt} могут быть произвольными (положительными, отрицательными). Скорости роста основных фондов F_t в зависимости от факторов следующие: скорость по фактору H может иметь произвольный знак, поэтому коэффициенты b_{2t} и b_{4t} могут быть произвольных знаков. Скорость по фактору U должна быть отрицательной, т. е. должно быть $\partial F_{it}/\partial U_{it} = b_{3t} + b_{4t}H_t \leqslant 0$. Скорости роста капитальных вложений отрасли K_t в зависимости от введенных факторов должны быть неотрицательными, поэтому должно быть $d_{1t} \geqslant 0$; $d_{2t} \geqslant 0$; $d_{3t} + d_{5t}H_t \geqslant 0$; $d_{4t} \geqslant 0$; $d_{j+6,\,t} \geqslant 0$. Скорости роста расходов на образование в зависимости от введенных факторов могут иметь произвольные знаки, поэтому коэффициенты h_{jt} могут иметь произвольные знаки.

Скорости роста производительности труда в зависимости от введенных факторов должны быть следующими: по численности работников A — произвольного знака, по величине основных фондов F — произвольного знака, по расходам на образование S — неотрицательная, т. е. r_{1t}, r_{2t} — произвольных знаков, а $r_{3t} \geqslant 0, \ldots, r_{8t} \geqslant 0$.

Если коэффициенты не удовлетворяют приведенным условиям, то следует по возможности изменить число лет базового периода, ввести другие факторы, решать задачу не простым методом наименьших квадратов, а с дополнениями, наложенными на коэффициенты, т. е. решать задачу выпуклого квадратичного программирования.

Для уравнений результирующих показателей коэффициенты следующие: $q_{t1} \geqslant 0$; $\tau_t q_{i2} F_{it}^{\tau_t - 1} + q_{i5} Z_{it} \geqslant 0$; $\varphi_t q_{t3} Z_{it}^{\varphi_t - 1} + F_{it} q_{i5} \geqslant 0$. Показатели степени τ_t, φ_t, ψ_t находят из условий максимума точности прогноза, определенного по нескольким последним годам базового периода.

Для оценки функции f_v по точности прогноза используют следующий принцип: уменьшают m базовых точек на n последних, т. е. рассматривают базу в $m - n$ точек. На основании этой новой базы по методу наименьших квадратов для функции $f_v(x, a)$ определяют параметры a, и делают прогноз показателя x_{vt}^n на n последних точках, затем вычисляют взвешенную сумму квадратов отклонений теоретических и от фактических значений процесса x

$$G_{vn} = \frac{1}{n} \sum_{t=m-n+1}^{m} (x_{vt}^n - x_t)^2.$$

Далее последовательно уменьшают n до 1 и проводят те же вычисления. Затем суммируют полученные G_{vn}, усредняют их и получают точность прогноза по формуле

$$H_{vn} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{n-l} \sum_{t=m-n+l+1}^{m} (x_{vt}^n - x_t)^2.$$

Выбирают те функции f_v, при которых H_{vn} принимает наименьшее значение.

Для получения прогнозов F_{it}, K_{it}, S_{it} используют данные прогнозов H_t, полученных по сводным уравнениям.

Получив значения прогнозов по уравнениям для ключевых переменных рассчитывают прогнозы H_t, x_t, M_t и сравнивают с прогнозами этих показателей, полученных по сводным уравнениям x_t^*, M_t^*, H_t^*. Тогда отклонения составят $\Delta x_t = x_t^* - x_t$; $\Delta M_t = M_t^* - M_t$; $\Delta H_t = H_t^* - H_t$.

Для устранения этих расхождений можно применить следующий метод. Пусть Δx_{it}, ΔM_{it}, ΔH_{it} — искомые отклонения соответственно валового продукта, материальных затрат и национального дохода i-й отрасли, которые должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{i=1}^{7} \Delta x_{it} = \Delta x_t; \quad \sum_{i=1}^{7} \Delta M_{it} = \Delta M_t; \quad \sum_{i=1}^{7} \Delta H_{it} = \Delta H_t;$$

$$\alpha_{it} \leqslant \Delta x_{it} \leqslant \beta_{it}; \ \gamma_{it} \leqslant \Delta M_{it} \leqslant \sigma_{it}; \ \delta_{it} \leqslant \Delta H_{it} \leqslant \xi_{it}; \ \Delta H_{it} = \Delta x_{it} - \Delta M_{it},$$

где α_{it}, β_{it}, γ_{it}, σ_{it}, δ_{it}, ξ_{it} — нижние и верхние пределы изменения Δx_{it}, ΔM_{it}, ΔH_{it}. Эти искомые величины зависят от A, F, K, S, P, которые в свою очередь зависят от Z, U, S.

Обозначим через ΔZ_{it}, ΔU_{it}, ΔS_{it} искомые величины, которые согласно уравнениям ключевых переменных должны вызвать изменения ΔA_{it}, ΔF_{it}, ΔK_{it}, ΔS_{it}, ΔP_{it}, а затем, согласно уравнениям результирующих показателей, они должны вызвать изменения Δx_{it}, ΔM_{it}, ΔH_{it}. При этом предполагается, что величины L_t, H_t, D_{it} в уравнениях для ключевых переменных не изменяются. Таким образом, учитывая вышеприведенные связи,

$$\Delta x_{it} = f_{1i}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}); \ \Delta M_{it} = f_{2i}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}),$$

можно записать основные соотношения

$$\sum_{i=1}^{7} f_{1i}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}) = \Delta x_t;$$

$$\alpha_{it} \leqslant f_{1i}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}) \leqslant \beta_{it};$$

$$\sum_{i=1}^{7} f_{2i}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}) = \Delta M_t;$$

$$\gamma_{it} = f_{2i}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}) \leqslant \sigma_{it};$$

$$\sum_{i=1}^{7} [f_{it}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}) - f_{2i}(\Delta Z_{it}, \Delta S_{it})] = \Delta H_t;$$

$$\delta_{it} \leqslant f_{3t}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}) \leqslant \xi_{it}.$$

При каждом t в этой системе имеется три уравнения и $3 \times 7 = 21$ неизвестных ΔZ_{it}, ΔU_{it}, ΔS_{it} $(i = 1, 2, \ldots, 7)$. Эти неизвестные определяют из условия максимизации общего веса всех валовых продуктов отраслей

$$\sum_{i=1}^{7} E_{it}\Delta x_{it} = \sum_{i=1}^{7} f_{1i}(\Delta Z_{it}, \Delta U_{it}, \Delta S_{it}) \to \max,$$

где E_{it} — вес i-й отрасли в t-м году. Вес E_{it} может отражать меру дефицитности продукции i-й отрасли.

При разработке народнохозяйственных планов большое значение имеет критерий оптимальности. Построение общего народнохозяйственного критерия оптимальности плана наталкивается на большие трудности, связанные с необходимостью соизмерения различных благ. Например, необходимо выразить количественно и соизмерить такие блага, как жизненный и культурный уровень народа, производство продукции, образование, медицинское

обслуживание, обеспечение обороноспособности. Поскольку такой критерий еще не построен, то применяют частные критерии, например национальный доход. Однако частные критерии на уровне народного хозяйства могут не согласовываться с отраслевыми критериями. Поэтому практически согласование производится путем получения основных показателей народнохозяйственного плана на основании частного критерия оптимальности, а затем эти показатели вводят в модель отраслевого планирования в виде ограничивающих условий. Например, полученные на основе народнохозяйственной модели объемы капитальных вложений по отраслям используются как ограничения для отраслевой модели. Аналогично производится согласование отраслевых планов с планами предприятий отрасли (министерства).

Глава 8

МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Изменение экономических показателей исследуется с помощью анализа и экстраполяции временных рядов. Длина этих рядов небольшая и выборка значений не репрезентативная, что значительно затрудняет использование методов математической статистики для их исследований и прогнозирования. Обычно рассматривается два вида временных рядов: однофакторные и многофакторные. Однофакторный временной ряд отражает зависимость показателя от одного фактора. Многофакторный ряд отражает зависимость от нескольких факторов (среди этих факторов может быть и время).

ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОДНОФАКТОРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Задан однофакторный временной ряд, необходимо определить функцию, отражающую тенденцию изменения этого ряда, а затем использовать ее для прогнозирования.

Введем обозначения:

t — номер года (периода времени);
m — количество лет (периодов времени), для которых известны измерения показателя;
T — количество лет прогнозируемого периода;
y_t — известные значения показателя (статистические данные) в t-м году (периода времени);
f_t — функция, отражающая тенденцию показателя y в t-м году;
$y(t)$ — теоретические значения показателя в t-м году;
$\varepsilon(t)$ — случайная составляющая, имеющая нулевую среднюю.

Зависимость для однофакторного ряда $y(t) = f(t) + \varepsilon(t)$.

Задача состоит в следующем: на основании статистических значений y_t за m лет подобрать такую функцию $f(t)$, которая лучше отражает временной ряд y_t $(t = 1, 2, \ldots, m)$.

В качестве функций $f(t)$ наиболее часто используют следующие: линейную $y = a + bt$; параболическую (квадратическую) $y = a + bt + ct^2$; нормальную $y = Ae^{kt^2}$; степенную $y = at^b$; экспоненциальную $y = ae^{bt}$; модифицированную экспонента $y = A - e^{bt}$; логистическую $y = A/(1 + e^{-ct})$; гиперболическую $y = a + b/(c + t)$; комбинированную экспоненциально-степенную функцию $y = e^{at}t^b$; функцию Гимпертца $y = a^{b^t}$; комбинированную линейно-гиперболическую $y = a + bt + c/t$; колебательную $y = a + bt + \sum_{i=1}^{n} c_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$.

Если вид функции наперед выбран, то производится расчет параметров функции. Очень часто для этой цели используют метод наименьших квадратов, т. е. определяют такие значения параметров функции, при которых достигается минимум суммы квадратов отклонений теоретических значений показателя от теоретических:

$$\sum_{t=1}^{m} [f(t) - y_t]^2 \to \min.$$

Значения параметров получают в результате решения нормальных уравнений. Рассмотрим эти методы.

Линейная функция $y = a + bt$. Параметры a, b находят решением системы линейных уравнений

$$am + b\sum_{t=1}^{m} t = \sum_{t=1}^{m} y_t; \quad a\sum_{t=1}^{m} t + b\sum_{t=1}^{m} t^2 = \sum_{t=1}^{m} ty_t.$$

Квадратическая функция $y = a + bt + ct^2$.

Параметры находят решением системы линейных уравнений $am + b\sum_{t=1}^{m} t + c\sum_{t=1}^{m} t^2 = \sum_{t=1}^{m} y_t$; $a\sum_{t=1}^{m} + b\sum_{t=1}^{m} t^2 + c\sum_{t=1}^{m} t^3 = \sum_{t=1}^{m} ty_t$; $a\sum_{t=1}^{m} t^2 + b\sum_{t=1}^{m} t^3 + c\sum_{t=1}^{m} t^4 = \sum_{t=1}^{m} t^2 y_t$.

Нормальная функция $y = Ae^{kt^2}$. Параметры A и k находят следующим образом. Сначала определяют $\ln A$ и k из системы линейных уравнений

$$m \ln A + k\sum_{t=1}^{m} t^2 = \sum_{t=1}^{m} \ln y_t; \quad \ln A\sum_{t=1}^{m} t^2 + k\sum_{t=1}^{m} t^4 = \sum_{t=1}^{m} t^2 \ln y_t,$$

затем потенцированием определяют $A = e^{\ln A}$.

Степенная функция $y = at^b$. Параметры a и b находят следующим образом. Сначала находят $\ln a$ и b из системы уравнений

$$m \ln a + b\sum_{t=1}^{m} \ln t = \sum_{t=1}^{m} \ln y_t; \quad \ln a\sum_{t=1}^{m} \ln t + b\sum_{t=1}^{m} (\ln t)^2 = \sum_{t=1}^{m} \ln t \ln y_t.$$

Затем потенцированием находят $a = e^{\ln a}$.

Экспоненциальная функция $y = ae^{bt}$. Параметры a и b находят следующим образом. Сначала определяют $\ln a$ и b из системы уравнений

$$m \ln a + b\sum_{t=1}^{m} t = \sum_{t=1}^{m} \ln y_t; \quad \ln a\sum_{t=1}^{m} t + b\sum_{t=1}^{m} t^2 = \sum_{t=1}^{m} t \ln y_t.$$

Затем потенцированием определяют $a = e^{\ln a}$.

Модифицированная экспонента $y = A - e^{bt}$. У этой функции параметр A считается известным, а параметр b определяют по формуле

$$b = \sum_{t=1}^{m} t \ln (A - y_t) \Big| \sum_{t=1}^{m} t^2.$$

Логистическая $y = A/(1 + e^{-ct})$. Чтобы применить метод наименьших квадратов для определения параметров A и c сначала вычислим производную $dy/dt = Ace^{-ct}/(1 + e^{-ct})^2 = cy(A - y)/A = cy + by^2$, где $b = c/A$.

Поскольку аргумент t принимает значения $t = 1, 2, \ldots, m$, то $dy/dt = \Delta y_t - y_{t-1}$ $(t = 2, 3, \ldots, m)$. Для получения параметров c и b решают систему уравнений

$$c\sum_{t=2}^{m} y_t^2 + b\sum_{t=2}^{m} y_t^3 = \sum_{t=2}^{m} y_t \Delta y_t; \quad c\sum_{t=2}^{m} y_t^3 + b\sum_{t=2}^{m} y_t^4 = \sum_{t=2}^{m} y_t^2 \Delta y_t.$$

Затем определяют

$$A = -c/b.$$

Гиперболическая функция $y = a + b/(t + c)$. В этой функции параметр c считается известным, остальные параметры a и b определяют решением системы линейных уравнений

$$ma + b\sum_{t=1}^{m} (t + c)^{-1} = \sum_{t=1}^{m} y_t; \quad a\sum_{t=1}^{m} (t + c)^{-1} + b\sum_{t=1}^{m} (t + c)^{-2} = \sum_{t=1}^{m} y_t (t + c)^{-1}.$$

Комбинированная экспоненциально-степенная функция $y = e^{at}t^b$. Параметры a и b находят из следующей системы линейных уравнений

$$a\sum_{t=1}^{m} t^2 + b\sum_{t=1}^{m} t \ln t = \sum_{t=1}^{m} t \ln y_t;$$

$$a\sum_{t=1}^{m} t \ln t + b\sum_{t=1}^{m} (\ln t)^2 = \sum_{t=1}^{m} \ln t \ln y_t.$$

Функция Гомпертца $y = a^{bt}$. Для определения параметров a и b сначала решают систему уравнений относительно $\ln b$ и $\ln \ln a$

$$\ln b \sum_{t=1}^{m} t + m \ln \ln a = \sum_{t=1}^{m} \ln \ln y_t;$$

$$\ln b \sum_{t=1}^{m} t^2 + \ln \ln a \sum_{t=1}^{m} t = \sum_{t=1}^{m} t \ln \ln y_t.$$

Затем потенцированием определяют $b = e^{\ln b}$, $a = e^{e^{\ln \ln a}}$.

Комбинированная линейно-гиперболическая функция $y = a + bt + c/t$. Для определения параметров a, b и c решают систему линейных уравнений

$$ma + b\sum_{t=1}^{m} t + c\sum_{t=1}^{m} t^{-1} = \sum_{t=1}^{m} y_t; \quad a\sum_{t=1}^{m} t + b\sum_{t=1}^{m} t^2 + mc = \sum_{t=1}^{m} ty_t; \quad a\sum_{t=1}^{m} t^{-1} + bm + c\sum_{t=1}^{m} t^{-2} = \sum_{t=1}^{m} t^{-1}y_t.$$

Колебательная функция $y = a + bt + \sum_{i=1}^{n} c_i \sin(w_i t + \varphi_i)$ представлена в виде $y = a + bt + \sum_{j=1}^{n} (a_j \cos jwt + b_j \sin jwt)$, где $w = 2\pi/p$ (p — период изменения функции y).

Параметры $a, b, a_j, b_j (j = 1, 2, ..., n)$ находят из системы $(2n + 2)$ уравнений с $(2n + 2)$ неизвестными

$$ma + b \sum_{t=1}^{m} t + \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{t=1}^{m} \cos jwt + \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{t=1}^{m} \sin jwt = \sum_{t=1}^{m} y_t;$$

$$a \sum_{t=1}^{m} t + b \sum_{t=1}^{m} t^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{t=1}^{m} t \cos jwt + \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{t=1}^{m} t \sin jwt = \sum_{t=1}^{m} t y_t;$$

$$a \sum_{t=1}^{m} \cos kwt + b \sum_{t=1}^{m} t \cos kwt + \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{t=1}^{m} \cos jwt \cos kwt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{t=1}^{m} \sin jwt \cos kwt = \sum_{t=1}^{n} y_t \cos kwt \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$a \sum_{t=1}^{m} \sin kwt + b \sum_{t=1}^{m} t \sin kwt + \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{t=1}^{m} \cos jwt \sin kwt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{t=1}^{m} \sin jwt \sin kwt = \sum_{t=1}^{n} y_t \sin kwt \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

В случае, когда колебательная функция имеет более простой вид

$$y = a_0/2 + \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \cos \frac{2\pi}{m} jt + b_j \sin \frac{2\pi}{m} jt \right),$$

параметры a_0, a_j, b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определяют по формулам

$$a_0 = \frac{2}{m} \sum_{t=1}^{m} y_t;$$

$$a_j = \frac{2}{m} \sum_{t=1}^{m} y_t \cos \frac{2\pi}{m} jt \quad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$b_j = \frac{2}{m} \sum_{t=1}^{m} y_t \sin \frac{2\pi}{m} jt \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

МЕТОД ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

Пусть имеются данные временного ряда y_t $(t = 1, 2, \ldots, m)$ и некоторые числа $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\beta = 1 - \alpha$.
Формула для экспоненциального сглаживания

$$S(t) = \alpha y_t + (1 - \alpha) S(t - 1) = \alpha y_t + \beta S(t - 1) \quad (t = 2, 3, \ldots, m).$$

Параметр α — постоянная сглаживания. Формулу экспоненциального сглаживания можно применить повторно и тогда получим функцию сглаживания n-го порядка

$$S^n(t) = \alpha S^{(n-1)}(t) + \beta S^{(n)}(t - 1) \quad (n = 2, 3, \ldots, m).$$

Применяя эту формулу последовательно для m точек, получаем:

$$S(m) = \alpha \sum_{n=1}^{m} \beta^n y_{m-n} + \beta^m y_1.$$

Эти формулы применяют для получения коэффициентов функции, выражающей тренд временного ряда в виде многочлена

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 + \cdots + \frac{1}{n!} a_n t^n.$$

В экономических прогнозах наиболее часто встречаются линейные и квадратические функции. Для линейной функции $y = a_0 + a_1 t$ используют формулы для определения параметров

$$a_0(t) = 2S^{(1)}(t) - S^{(2)}(t); \; a_1(t) = \frac{\alpha}{\beta}[S^{(1)}(t) - S^{(2)}(t)].$$

Для определения параметров a_0 и a_1 временного ряда, состоящего из m точек, используют следующий алгоритм:

1. Полагают $S^{(1)}(1) = S^{(2)}(1) = y_1$.
2. Вычисляют $S^{(1)}(2) = \alpha y_2 + \beta S^{(1)}(1)$; $S^{(2)}(2) = \alpha S^{(1)}(2) + \beta S^{(2)}(1)$.
3. По формулам для $t = 2$ вычисляют коэффициенты $a_0(t)$ и $a_1(t)$:

$$a_0(2) = 2S^{(1)}(2) - S^{(2)}(2); \; a_1(2) = \frac{\alpha}{\beta}[S^{(1)}(2) - S^{(2)}(2)],$$

4. Затем аналогично вычисляют значения $S^{(1)}(3)$, $S^{(2)}(3)$ и коэффициенты $a_0(3)$, $a_1(3)$ и т. д. до тех пор, пока получают $a_0(m)$, $a_1(m)$. Эти последние коэффициенты используются в функции

$$y = a_0(m) + a_1(m)t,$$

где t означает прогнозный год, т. е. прогнозные значения $y = (m + t) = a_0(m) + a_1(m)t$.

Замечание. Промежуточные значения $a_0(t)$, $a_1(t)$ для $t = 2, 3, \ldots, (m-1)$ рассчитывать необязательно. Важно получить значения $S^{(1)}(t)$ и $S^{(2)}(t)$ для $t = 2, 3, \ldots, m$, т. е. зная $S^{(1)}(m)$, $S^{(2)}(m)$ можно сразу получить

$$a_0(m) = 2S^{(1)}(m) - S^{(2)}(m); \; a_1(m) = \frac{\alpha}{\beta}[S^{(1)}(m) - S^{(2)}(m)].$$

Для квадратичной функции $y = a_0 + a_1 t + \frac{1}{2} a_2 t^2$ используют следующие формулы для определения параметров:

$$a_0(t) = 3S^{(1)}(t) - 3S^{(2)}(t) + S^{(3)}(t); \; a_1(t) = \frac{\alpha}{2\beta^2}[(6 - 5\alpha)S^{(1)}(t) -$$

$$- 2(5 - 4\alpha)S^{(2)}(t) + (4 - 3\alpha)S^{(3)}(t)];$$

$$a_2(t) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(S^{(1)}(t) - 2S^{(2)}(t) + S^{(3)}(t)).$$

Для вычисления параметров a_0, a_1, a_2 временного ряда квадратичной функции используют следующий алгоритм:

1. Полагают $S^{(1)}(1) = S^{(2)}(1) = S^{(3)}(1) = y_1$.
2. Вычисляют $S^{(1)}(2) = \alpha y_2 + \beta S^{(1)}(1)$; $S^{(2)}(2) = \alpha S^{(1)}(2) + \beta S^{(2)}(1)$; $S^{(3)}(2) = \alpha S^{(2)}(2) + \beta S^{(3)}(1)$.

3. Аналогично вычисляют

$$S^{(1)}(3) = \alpha y_3 + \beta S^{(1)}(2); \quad S^{(2)}(3) = \alpha S^{(1)}(3) + \beta S^{(2)}(2);$$
$$S^{(3)}(3) = \alpha S^{(2)}(3) + \beta S^{(3)}(2)$$

и т. д. до тех пор, пока получат

$$S^{(1)}(m) = \alpha y_m + \beta S^{(1)}(m-1); \quad S^{(2)}(m) = \alpha S^{(1)}(m) + \beta S^{(2)}(m-1);$$
$$S^{(3)}(m) = \alpha S^{(2)}(m) + \beta S^{(3)}(m-1).$$

4. Вычисляют значения коэффициентов

$$a_0 = a_0(m) = 3S^{(1)}(m) - 3S^{(2)}(m) + S^{(3)}(m);$$
$$a_1 = a_1(m) = \frac{\alpha}{2\beta^2}[(b-5\alpha)S^{(1)}(m) - 2(5-4\alpha)S^{(2)}(m) +$$
$$+ (4-3\alpha)S^{(3)}(m)], \quad a_2 = a_2(m) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}[S^{(1)}(m) - 2S^{(2)}(m) + S^{(3)}(m)]$$

и получают значения прогноза для t-го периода по формуле

$$y(m+t) = a_0(m) + a_1(m)t + (a_2(m)/2)\,t^2.$$

МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННОГО РЯДА С УЧЕТОМ ПРИРОСТА

В этом случае для временного ряда y_t $(t = 1, 2, \ldots, m)$ рассматривается зависимость $y(t) = y(t-1) + f(\tilde{t})$. Тогда для исходного ряда формируются приросты $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ $(t = 2, 3, \ldots, m)$ и параметры функции $f(t)$ определяются на основании временного ряда Δy_t $(t = 2, 3, \ldots, m)$ и затем вычисляют прогнозы по формуле $y(t) = y_{t-1} + f(t)$.

МЕТОД ОТБОРА ЛУЧШЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОДНОФАКТОРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Пусть имеется временной ряд y_t $(t = 1, 2, \ldots, m)$. Для определения тенденции $f(t)$ этого ряда рассматривается множество M функций $f_q(t)$ $(q = 1, 2, \ldots, Q)$. Требуется из множества M выбрать лучшую функцию. Для этого может применяться метод ступенчатого отбора.

1. Проверка по содержательному смыслу. С этой целью вычисляют коэффициенты эластичности $E_{qt} = \frac{t}{y(t)}(dy/dt)$ и формируют множество M_1 тех функций, для которых коэффициент эластичности отвечает содержательному смыслу. Например, если с увеличением t показатель $y(t)$ должен расти, то отбирают лишь те функции, для которых $E_{qt} > 0$. Если с увеличением t показатель $y(t)$ должен уменьшаться, то отбирают лишь те функции, для которых $E_{qt} < 0$.

2. Оценки по точности прогноза. Все множество значений y_t $(t = 1, 2, \ldots, m)$ разбивают на два: базовое — первые n точек, проверочное — последние $h = (m - n)$ точек. Первое множество точек служит базой для определения функции $f(t)$, выражающей тенденцию изменения $y(t)$, а второе — для проверки получаемых значений прогноза. Пусть y^h_{qt} — значения прогноза показателя $y(t)$ в t-м году, полученные по функции $f_q(t)$ на базе n первых точек. Тогда точность прогноза вычисляется как взвешенное средне-

квадратическое отклонение теоретических значений от фактических на проверочном множестве точек по формуле

$$H_{qh} = \left[\frac{1}{h} \sum_{e=0}^{h-1} \frac{1}{h-e} \sum_{t=m-h+e+1}^{m} (y_{qt}^{h} - y_t)^2\right]^{1/2}.$$

Из множества функций M_1 формируется множество функций M_2, для которых H_{qh} принимают наименьшие значения (или близкие к наименьшим).

3. Оценки по точности аппроксимации. Из множества функций M_2 отбирают функцию, для которой среднеквадратическое отклонение наименьшее. Если $y_q(t)$ — теоретическое значение показателя в t-й момент, вычисленное по q-й функции на базе всех m точек, то среднеквадратическое отклонение

$$S = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} [y_q(t) - y_t]^2}.$$

МНОГОФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Определяется регрессионная зависимость между экономическим показателем и факторами.

Введем обозначения:

t — номер года (периода времени);
m — число лет базового периода;
T — число лет прогнозируемого периода;
y_t — фактические значения показателя в t-й год;
$y(t)$ — теоретические значения показателя в t-й год;
i — номер фактора;
n — число всех факторов;
x_{it} — значение i-го фактора в t-м году;
a_i — неопределенные параметры функций, выражающие зависимость между показателем и факторами.

Основные виды зависимостей:

1. *Линейная* $y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}$ $(t = 1, 2, \ldots, m, m+1, \ldots, m+T)$.

Коэффициенты a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ определяют по методу наименьших квадратов решением системы линейных уравнений

$$ma_0 + a_1 \sum_{t=1}^{m} x_{1t} + \ldots + a_n \sum_{t=1}^{m} x_{nt} = \sum_{t=1}^{m} y_t;$$

$$a_0 \sum_{t=1}^{m} x_{it} + a_1 \sum_{t=1}^{m} x_{1t} x_{it} + \ldots + a_n \sum_{t=1}^{m} x_{nt} x_{it} = \sum_{t=1}^{m} y_t x_{it}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad n + 1 < m).$$

2. *Линейно-гиперболическая* $y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i}$, где $r_i = \pm 1$. Параметры a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ определяют методом наименьших квадратов решением системы линейных уравнений

$$ma_0 + a_1 \sum_{t=1}^{m} x_{1t}^{r_1} + \ldots + a_n \sum_{t=1}^{m} x_{nt}^{r_n} = \sum_{t=1}^{m} y_t;$$

$$a_0 \sum_{t=1}^{m} x_{it}^{r_i} + a_1 \sum_{t=1}^{m} x_{1t}^{r_1} x_{it}^{r_i} + \ldots + a_n \sum_{t=1}^{m} x_{nt}^{r_n} x_{it}^{r_i} = \sum_{t=1}^{m} y_t x_{it}^{r_i}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad n+1 < m).$$

3. *Гиперболическо-квадратическая* $y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i x_{it}^{r_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{it} \times$ $\times\, x_{jt}$.

Параметры a_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, a_{ij} $(ij = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ определяют по методу наименьших квадратов решением системы линейных уравнений

$$ma_0 + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i} + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{it} x_{jt} = \sum_{t=1}^{m} y_t;$$
$$a_0 \sum_{t=1}^{m} x_{jt}^{r_j} + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i} x_{jt}^{r_j} + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ij} x_{it} x_{kt} x_{jt}^{r_i} = \sum_{t=1}^{m} y_t x_{jt}^{r_j}$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$
$$a_0 \sum_{t=1}^{m} x_{kt} x_{st} + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i} x_{kt} x_{st} + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{it} x_{jt} x_{kt} x_{st} =$$
$$= \sum_{t=1}^{m} y_t x_{kt} x_{st} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$
$$n + 1 + n^2 < m; \quad r_i = \pm 1).$$

4. *Квадратическая* $y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{it} x_{jt}$. Это частный случай 3-го типа гиперболическо-квадратической зависимости, получаемой при $r_i = 1$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

5. *Экспоненциальная* $y(t) = \exp\left\{a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i}\right\}$, где $r_i = \pm 1$.

Параметры a_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ определяют по методу наименьших квадратов решением системы линейных уравнений

$$ma_0 + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i} = \sum_{t=1}^{m} \ln y_t; \quad a_0 \sum_{t=1}^{m} x_{jt}^{r_j} + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i} x_{jt}^{r_j} =$$
$$= \sum_{t=1}^{m} x_{jt}^{r_j} \ln y_t \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n + 1 < m).$$

6. *Экспоненциальная с учетом насыщения* $y(t) = A - \exp\{a_0 +$ $+ \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i}\}$, где A — известное число, означающее уровень насыщения; $r_i =$ $= \pm 1$. Параметры a_0, a_1, ..., a_n определяют по методу наименьших квадратов решением системы уравнений

$$ma_0 \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i} = \sum_{t=1}^{m} \ln(A - y_t); \quad a_0 \sum_{t=1}^{m} x_{jt}^{r_j} + \sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_i} x_{jt}^{r_j} =$$
$$= \sum_{t=1}^{m} x_{jt}^{r_j} \ln(A - y_t)$$
$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n + 1 < m).$$

7. *Степенная* $y(t) = x_{1t}^{a_1} x_{2t}^{a_2}, \ldots, x_{nt}^{a_n}$.

Параметры $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определяют по методу наименьших квадратов решением системы уравнений

$$\sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_{it} \ln x_{jt} = \sum_{t=1}^{m} \ln y_t \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ n < m).$$

МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ ЛАГА ФАКТОРОВ

Модели прогнозирования с учетом сосредоточенного лага факторов

$$y(t) = f(x_{1t-s_1}, x_{2t-s_2}, \ldots, x_{nt-s_n}) + ay_s,$$

где s — сосредоточенный лаг показателя y; s_i — сосредоточенный лаг i-го фактора ($i = 1, 2, \ldots, n$); f — функция, выражающая тенденцию (она может быть одной из приведенных выше: линейной, линейно-гиперболической, гиперболическо-квадратической и т. д.). Нахождение параметров a_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) функции f и величин лагов — это сложная задача.

Приведен метод нахождения этих параметров и величин лагов для линейной функции $y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it-s_i}$, где $0 \leqslant s_i \leqslant b_i$.

Надо определить a_0, a_i, s_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Для этого используют метод наименьших квадратов, т. е. находят минимум суммы квадратов отклонений теоретических значений показателя от фактических

$$L = \sum_{t=b+1}^{m} \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it-s_i} - y_t\right)^2 \to \min$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $b = \max_i b_i$.

Вводят новые переменные

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если } k = m - s_i \\ 0, \text{ если } k \neq m - s_i \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n: \\ k = m - b_i, m - b_i + 1, \ldots, m \end{pmatrix},$$

тогда

$$\sum_{k=m-b_i} y_{ik} = 1: \quad x_{im-s_i-l} = \sum_{k=m-b_i}^{m} x_{ik-l} y_{ik} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n; \\ l = 1, 2, \ldots, m - b_i - 1 \end{pmatrix}$$

полагая $m - l = t$, получаем $y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=m-b_i}^{m} x_{ik-m+t} y_{ik}$.

Обозначая $a_i y_{ik} = z_{ik}$, получаем: $y(t) = a_0 \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=m-b_i}^{m} z_{ik} x_{ik-m+t}$, тогда

$$L = \sum_{t=b+1}^{m} \left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=m-b_i}^{m} z_{ik} x_{ik-m+t} - y_t\right]^2 \to \min.$$

Для определения a_0, z_{ik} составляется система уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial a_0} = 2 \sum_{t=b+1}^{m} \left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=m-b_i}^{m} z_{ik} x_{ik-m+t} - y_t\right] = 0:$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_{ik}} = 2\sum_{t=b+1}^{m}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=m-b_l}^{m} z_{ik}x_{ik-m+t} - y_t\right)x_{ik-m+t} = 0$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n:\quad k = m - b_l,\ m - b_l + 1,\ \ldots,\ m).$$

Решая эту систему, находим a_0, z_{ik} и затем $a_l = \sum\limits_{k=m-b_l}^{m} z_{ik}$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$. Для определения y_{ik} подставляют $z_{ik} = a_l y_{ik}$ в систему уравнений и получают

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=m-b_l}^{m} c_{jik}y_{ik} = d_j \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

где N — число неизвестных.

Решают задачу квадратического целочисленного программирования

$$F = \sum_{j}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=m-b_l}^{m} c_{jik}y_{ik} - d_j\right)^2 \to \min;\qquad \sum_{k=m-b_l} y_{ik} = 1;\ y_{ik} = 0 \text{ или } 1.$$

Многофакторные модели с учетом распределенного лага. Они выражаются в виде

$$y(t) = b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \cdots + b_s y_{t-s} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s_i} a_i a_{ij} x_{it-j},$$

где s — известный наибольший лаг показателя; s_i — известный наибольший лаг i-го фактора $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$; a_{ij} — неизвестные коэффициенты, показывающие распределение лага i-го фактора по годам; j, b_1 b_2, $\ldots$, b_s — неизвестные коэффициенты распределения лага показателя; a_i — неизвестные параметры. Для них должны выполняться условия $a_{ij} \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=0}^{s_i} a_{ij} = 1$, $b_l \geqslant 0$, $\sum\limits_{l=1}^{l} b_l = 1$. Для нахождения a_i, a_{ij}, b_l, s_i решают задачу математического программирования

$$L = \sum_{t=b+1}^{m}\left(a_0 + \sum_{l=1}^{s} b_l y_{t-l} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s_i} a_i a_{ij} x_{it-j} - y_t\right)^2 \to \min$$

при условиях $a_{ij} \geqslant 0$, $b_l \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=0}^{s_i} a_{ij} = 1$, $\sum\limits_{l=1}^{s} b_l = 1$, $b = \max\limits_{i}(s_i,\ s)$.

Вводя переменные $z_{ij} = a_i a_{ij}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, получим $L = \sum\limits_{t=b+1}^{m}\Big(a_0 + \sum\limits_{l=1}^{s} b_l y_{t-l} + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{s_i} z_{ij}x_{it-j} - y_t\Big)^2 \to \min$. Параметры a_0, b_l, z_{ij} находят из системы нормальных линейных уравнений (метод наименьших квадратов), тогда $a_i = \sum\limits_{j=0}^{s_i} z_{ij}$ становится известным и поэтому остается решить задачу

квадратического программирования относительно a_{ij}

$$L = \sum_{t=b+1}^{m} \left(a_0 + \sum_{l=1}^{s} b_l y_{t-l} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{s_l} a_i a_{ij} x_{it-j} - y_t\right)^2 \to \min$$

при ограничениях $\sum_{j=0}^{s_l} a_{ij} = 1$, $a_{ij} \geqslant 0$.

Многофакторные модели прогнозирования с учетом лага и взаимосвязей между факторами. Рассматривается пример такой функции

$$y(t) = b_0 + \sum_{j=1}^{s} b_j y_{t-j} + \sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}^{r_l} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{e=1}^{n} a_{ie} x_{it} x_{et},$$

где $r_l = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Остальные параметры b_0, b_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$, a_l $(i = 1, 2, \ldots, n)$, t_e $(l = 1, 2, \ldots, n;\ e = 1, 2, \ldots, n)$ определяются по методу наименьших квадратов, т. е. путем нахождения минимума функции

$$L = \sum_{t=b}^{m} \left[b_0 + \sum_{j=1}^{s} b_j y_{t-j} + \sum_{i=1}^{n} a_l x_{it}^{r_l} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{e=1}^{n} a_{le} x_{lt} x_{et} - y_t\right]^2 \to \min,$$

где $b = \min\limits_{l} (s_l, s)$; m — число базовых точек.

Нормальные уравнения для неизвестных:

$$mb_0 + \sum_{t=b}^{m} \left[\sum_{j=1}^{s} b_j y_{t-j} + \sum_{i=1}^{n} a_l x_{lt}^{r_l} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} x_{it} x_{lt}\right] = \sum_{t=b}^{m} y_t;$$

$$\sum_{t=b}^{m} \left[b_0 y_{t-k} + \sum_{j=1}^{s} b_j y_{t-j} y_{t-k} + \sum_{i=1}^{n} a_l x_{it}^{r_i} y_{t-k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} x_{it} x_{lt} y_{t-k}\right] =$$

$$= \sum_{t=b}^{m} y_{t-k} y_t \quad (k = 1, 2, \ldots, s);$$

$$\sum_{t=b}^{m} \left[b_0 x_{qt}^{r_q} + \sum_{j=1}^{s} b_j y_{t-j} x_{qt}^{r_q} + \sum_{i=1}^{n} a_l x_{it}^{r_l} x_{qt}^{r_q} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{il} x_{it} x_{lt} x_{qt}^{r_q}\right] = \sum_{t=b}^{m} x_{qt}^{r_q} y_t \quad (q = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\sum_{t=b}^{m} \left[b_0 x_{pt} x_{gt} + \sum_{j=1}^{s} b_j y_{t-j} x_{pt} x_{gt} + \sum_{i=1}^{n} a_{it} x_{it}^{r_l} x_{pt} x_{gr} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ij} x_{it} x_{lt} x_{pt} x_{gt}\right] = \sum_{t=b}^{m} x_{pt} x_{gt} y_t \quad (p, g = 1, 2, \ldots, n).$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

В этих моделях предполагается, что параметры функции зависят от времени.

Рассматривается пример

$$y(t) = a_0 + b_0 t^{u_0} + \sum_{i=1}^{n} (a_l + b_l t^{u_l})\, x_{it}^{r_l},$$

где $u_i = \pm 1$, $r_i = \pm 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Параметры a_i, b_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) неопределенные, их определяют по методу наименьших квадратов, т. е. находят минимум суммы

$$L = \sum_{t=1}^{m} [a_0 + b_0 t^{u_0} + \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i t^{u_i}) x_{it}^{r_i} - y_t]^2 \to \min.$$

Нормальная система уравнений для определения неизвестных a_i, b_i:

$$\sum_{t=1}^{m} [a_0 + b_0 t^{u_0} + \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i t^{u_i}) x_{it}^{r_i}] = \sum_{t=1}^{m} y_t;$$

$$\sum_{t=1}^{m} [a_0 t^{u_0} + b_0 t^{2u_0} + \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i t^{u_i}) x_{it}^{r_i} t^{u_0} = \sum_{t=1}^{m} y_t t^{u_0};$$

$$\sum_{t=1}^{m} [a_0 x_{jt}^{r_j} + b_0 t^{u_0} x_{jt}^{r_j} + \sum_{i=i}^{n} (a_i + b_i t^{u_i}) x_{it}^{r_i} x_{jt}^{r_j}] = \sum_{t=1}^{m} x_{jt}^{r_j} y_t \quad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\sum_{t=1}^{m} [(a_0 + b_0 t^{u_0}) t^{u_j} x_{jt}^{r_j} + \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i t^{u_i}) t^{u_j} x_{jt}^{r_j} = \sum_{t=1}^{m} x_{jt}^{r_j} t^{u_j} y_t \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

МЕТОД ОТБОРА ЛУЧШЕЙ ФУНКЦИИ, ВЫРАЖАЮЩЕЙ ТЕНДЕНЦИЮ ПРОГНОЗА ДЛЯ МНОГОФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Пусть $y(t) = f_q(x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt}; a_0, a_1, \ldots, a_k)$, где f_q — функция, выражающая тенденцию; x_{it} — значение i-го фактора в t-м году; q — номер функции; Q — количество всех функций; $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — параметры функции. Тогда метод отбора можно описать так.

1. Из множества M всех функций формируется множество M_1 функций, которые отвечают содержательному смыслу. Одной из проверок содержательного смысла есть соответствие коэффициентов эластичности $E_{it}^q = (x_{it}/f_q) \times (\partial f_q / \partial x_i)$.

Пусть согласно содержательному смыслу экономический показатель должен расти при увеличении фактора x_j, тогда должно быть $E_{jt}^q > 0$. Если это не так, то q-я функция не попадает в множество M_1. Если согласно содержательному смыслу экономический показатель должен убывать при увеличении j-го фактора, то должно быть $E_{jt}^q < 0$. Поэтому отбрасываются все те функции f_q, для которых $E_{jt}^q > 0$.

Для отбора функций можно использовать и другие свойства коэффициентов эластичности.

2. Отбор по ошибке прогнозирования. Для этого уменьшают базу m лет (точек) на h последних, т. е. рассматривается база $(m - h)$ первых точек t. При этом надо помнить, что $(m - h)$ должно быть больше, чем число $(k + 1)$ параметров функции f_q. На основании базы $(m - h)$ точек по методу наименьших квадратов для f_q определяют параметры $a_0, a_1, \ldots, a_k$ и вычисляют прогноз y_{qt}^h экономического показателя $y(t)$ для $t = m - h + 1, m - h + 2, \ldots, m$. Составляют взвешенную сумму квадратов отклонений теоретических значений от фактических

$$G_{qh} = \frac{1}{h} \sum_{t=m-h+1}^{m} (y_{qt}^h - y_t)^2.$$

Далее последовательно уменьшают h до 1, определяют G_{qh-e} ($e = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, h-1$) и усредняют их по формуле

$$H_{qh} = \frac{1}{h}\sum_{e=1}^{h-1} G_{qh-e} = \frac{1}{h}\sum_{h=e}^{h-1}\frac{1}{h-e}\sum_{t=m-h+e+1}^{m}(y_{qt}^{h} - y_t)^2.$$

Очевидно, чем меньше H_{qh}, тем точнее получается прогноз для $y(t)$. Поэтому из множества M_1 выбирают те функции f_q, для которых H_{qh} наименьшее, и получают множество M_2 функций.

3. Отбор по среднеквадратическому отклонению. Из множества M_2 отбирают функции, для которых среднеквадратическое отклонение наименьшее,

$$S_q = \left[\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}(y_q(t) - y_t)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $y_q(t)$ — значение показателя y, полученное по функции f_q.

Замечание 1. На практике целесообразно использовать в процентах точность прогноза

$$H_{qh}^{1} = 100H_{qh} \Big/ \frac{1}{h}\sum_{t=m-h+1}^{m} y_t$$

и точность аппроксимации

$$S_q^1 = 100S_q \Big/ \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} y_t.$$

Замечание 2. Вычисленные теоретические значения прогнозов $y(t)$ целесообразно корректировать по формуле

$$v(t) = y(t) + (y_m - y(m))/(t - m),$$

где $t = m+1,\ m+2, \ldots, m+T$ — значение точек t для прогнозного периода.

МЕТОД ГРУППОВОГО УЧЕТА АРГУМЕНТОВ (МГУА)

Для прогнозирования технико-экономического показателя используют данные о показателе и факторах за несколько базовых лет (моментов времени). Это множество точек (моментов времени) разбивают на два подмножества: обучающие точки и проверочные точки. На множестве обучающих точек находится прогнозирующая функция, а на множестве проверочных точек эта функция проверяется. Для получения множества проверяемых функций применяют метод нарастающей сложности. В качестве критерия выбора параметров функции на обучающем множестве может применяться метод наименьших квадратов, а для отбора лучшей функции применяют среднеквадратическое отклонение значений проверяемой функции на проверочном множестве.

Метод МГУА для нескольких факторов.

Введем обозначения:

t — момент времени (точка);

m — число всех моментов времени (точек);

M_1 — множество обучающих точек (моментов времени);
$m-h$ — число точек (моментов времени) множества M_1;
M_2 — множество проверочных точек (моментов времени);
y_t — значение показателя в момент времени t;
x_{it} — значение i-го фактора в момент времени t;
n — число всех факторов;
q — номер вида выбираемой функции для прогноза;
f_q — вид выбираемой функции для прогноза;
S_q — среднеквадратическое отклонение на множестве M_2 проверочных точек фактических значений показателя от теоретических, вычисленных согласно q-й функции.
y_t — фактическое значение показателей в момент t;
$y_q(t)$ — теоретическое значение показателя в точке t, вычисленное согласно q-й функции.

Множество функций строится следующим образом. Сначала выбираются самые простые, а затем последовательно усложняются.

Для $q=1$ рассматривают линейную $y_1(t)=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}$, для $q=$ рассматривают ковариации $y_2(t)=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{it}x_{jt} \quad (i \neq j)$, для $q=3$ рассматривают квадратическую $y_3(t)=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i x_{it}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \times$ $\times\, a_{ij}x_{it}x_{jt}$ и т. д. до тех пор, пока это возможно. Формальное возможное ограничение: число неопределенных коэффициентов a_0, a_i, a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ должно быть меньше чем $m-h$.

Для каждой функции на обучающем множестве точек M_1 вычисляют неопределенные коэффициенты a_0, a_i, a_{ij} по методу наименьших квадратов, затем теоретические значения параметра $y_q(t)$ на проверочном множестве M_2 и среднеквадратические отклонения

$$S_q=\left[\frac{1}{h}\sum_{t\in M_2}(y_q(t)-y_t)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Та функция считается лучшей, для которой S_q наименьшее.

Например, для $n=2$ получают функции

$$y_1(t)=a_0+a_1x_{1t}+a_2x_{2t};\quad y_2(t)=a_0+a_1x_{1t}+a_2x_{2t}+a_{12}x_{1t}x_{2t};$$
$$y_3(t)=a_0+a_1x_{1t}+a_2x_{2t}+a_{12}x_{1t}x_{2t}+a_{11}x_{1t}^2+a_{22}x_{2t}^2.$$

Существуют некоторые способы построения обучающих и проверочных множеств.

Первый способ. Все четные точки входят в обучающее множество, все нечетные точки входят в проверочное множество.

Второй способ. Все нечетные точки входят в обучающее множество, все четные — входят в проверочное множество.

Третий способ. Первые $(m-h)$ точек входят в обучающее множество, последние h точек входят в проверочное множество.

Четвертый способ. Последние h точек входят в обучающее множество, первые $(m - h)$ точек входят в проверочное множество.

Пятый способ. В проверочное множество выделяют наиболее характерные точки, а остальные точки образуют обучающее множество.

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОВОКУПНОСТИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМОСТИ

Необходимо получить прогноз каждого из совокупности показателей при условиях взаимозаменяемости и баланса.

Введем обозначения:

t — номер года;
m — число лет базового периода;
T — число лет прогнозируемого периода;
j — вид экономического показателя;
l — число всех видов совокупности экономических показателей;
i — вид фактора, от которого зависит экономический показатель;
n — число всех видов факторов;
q — вид функции, с помощью которой выражают тенденцию изменения экономического показателя;
Q — число всех видов функции;
y_{jt} — фактические значения j-го экономического показателя в t-м году;
$y_{qj}(t)$ — теоретическое значение j-го экономического показателя в t-м году, полученное по q-й функции;
y_{0t} — значение обобщающего (основного) экономического показателя в t-м году;
g_j — коэффициент взаимозаменяемости j-го показателя по отношению к обобщающему (например, $g_1 = 0{,}2$ означает, что единица 1-го экономического показателя эквивалентно заменяет 0,2 единицы обобщающего показателя);
x_{it} — значение i-го фактора в t-м году;
s — номер параметра функции, выражающей тенденцию изменения экономического показателя;
a_s — параметры функции, выражающей тенденцию изменения экономического показателя;
$f_{qj}(x_t, a)$ — q-я функция, выражающая тенденцию изменения j-го экономического показателя в зависимости от факторов $x_t = (x_{1t}, \ldots, x_{nt})$ и параметров $a = (a_0, a_1, \ldots, a_s, \ldots)$.

Математическая модель. Найти минимум суммы квадратов относительных отклонений теоретических значений экономических показателей от фактических значений

$$F_q = \sum_{t=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{f_{qj}(x_t, a) - y_{jt}}{y_{jt}} \right)^2 \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{l} g_j f_{qj}(x_t, a) = y_{0t}$$

для $t > m$ одного прогнозируемого года и при

$$E_{qjt} = \frac{x_{it}}{f_{qj}(x_t, a)} \quad \frac{\partial f_{qj}(x_t, a)}{\partial x_t} \gtrless 0,$$

где знак $\gtreqless$ означает больше, равно или меньше в зависимости от содержательного смысла влияния i-го фактора на j-й показатель.

Метод решения задачи может быть следующий. Для каждого j рассматривается множество M подходящих функций q и перебираются все возможные наборы функций по одной из каждого M_j. Для каждого набора решают задачу и определяют минимальное значение F, затем отбирают тот набор, для которого F принимает наименьшее значение.

Можно видоизменить алгоритм. Сначала для каждого j подбирают наилучший вид функции q исходя из решения частной задачи прогнозирования j-го показателя без учета взаимозаменяемости, а затем используют этот вид функции при неопределенных параметрах для решения поставленной задачи.

Экономико-математические модели и методы прогнозирования широко используют в практике при составлении тенденций развития процесса и получения количественных значений показателей процесса в будущем. Особое внимание уделяют методам отбора лучшей функции, выражающей тенденции развития процесса. Очень важно учитывать содержательный смысл формирования процесса при отборе лучшей функции, так как соответствие модели исследуемому процессу должно быть прежде всего по внутренним связям, которые, в частности, могут проявляться через коэффициенты эластичности или скорости изменения показателя в зависимости от изменения факторов.

Важным также является критерий точности прогнозов, который позволяет специалисту как-то судить о способности модели к прогнозированию. Часто модель может достаточно точно аппроксимировать данные процесса, но не обладать прогнозирующим свойством. Поэтому наряду с точностью аппроксимации следует делать отбор по критерию точности прогнозов.

Глава 9

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

МЕТОД ГАУССА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим схему единственного деления.

Пусть задана система уравнений

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = a_{10};\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = a_{20};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = a_{i0};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n0}.
\end{aligned}$$

Идея метода Гаусса для решения системы уравнений с n неизвестными состоит в последовательном исключении неизвестных. Сначала исключают одну неизвестную и получают систему $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными. Затем, по аналогии исключают 2-ю неизвестную и т. д. до тех пор, пока получится одно уравнение с одним неизвестным. Из него находят значение этой неизвестной и в обратном порядке последовательно определяют остальные неизвестные.

Пусть из системы необходимо исключить x_1. Для этого выберем разрешающий элемент — отличный от нуля коэффициент при x_1. Пусть $a_{11} \neq 0$ и выберем его в качестве разрешающего. Поскольку a_{11} находится в 1-м уравнении системы, то это уравнение разделим на a_{11}, тогда получим

$$x_1 + a_{12}^1 x_2 + \cdots + a_{1j}^1 x + \cdots + a_{1n}^1 x_n = a_{10}^1,$$

где $a_{1j}^1 = a_{1j}/a_{11}$ $(j = 1, 2, \ldots, n, 0)$.

Для того чтобы исключить x_1 из всех остальных уравнений системы, умножим его на a_{i1}. Полученное уравнение вычтем из i-го, тогда получим

$$a_{i2}^1 x_2 + \cdots + a_{ij}^1 x_j + \cdots + a_{in}^1 x_n = a_{i0}^1,$$

где

$$a_{ij}^1 = \frac{a_{ij}a_{11} - a_{1j}a_{i1}}{a_{11}} \; (i = 2, 3, \ldots, n; \quad j = 2, \ldots, n, 0).$$

Таким образом, получим систему $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными. К ней можно применить тот же метод и исключив x_2, получим новую систему $n-2$ уравнений с $n-2$ неизвестными

$$a_{i3}^2 x_3 + \cdots + a_{ij}^2 x_j + \cdots + a_{in}^2 x_n = a_{i0}^2 \quad (i = 3, \ldots, n, 0),$$

где

$$a_{ij}^2 = \frac{a_{ij}^1 a_{22}^1 - a_{2j}^1 a_{i2}^1}{a_{22}^1} \; (i = 3, \ldots, n; \quad j = 3, \ldots, n, 0).$$

и уравнение для x_2

$$x_2 + a_{23}^2 x_3 + \cdots + a_{2j}^2 x_j + \cdots + a_{2n}^2 x_n = a_{20}^2,$$

где $a_{2j}^2 = \dfrac{a_{2j}^1}{a_{22}^1}$ $(j = 3, 4, \ldots, n, 0)$.

Продолжая этот процесс, можно встретиться со следующими случаями:

1. На последнем n-м этапе получим одно уравнение с одним неизвестным $a_{nn}^n x_n = a_{n0}^n$ и уравнение для x_{n-1}: $x_{n-1} + a_{n-1,\,n}^n x_n = a_{n-1,\,0}^n$, тогда определяем x_n и совершаем обратный ход — подставляем x_n в предыдущее уравнение, находим x_{n-1}, затем x_{n-2} и т. д. Таким образом получим решение системы, которое является единственным.

2. На некотором k-м этапе получится строка, в которой все коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю, это значит, что исходная система имеет бесконечно много решений.

3. На некотором k-м этапе получится строка, в которой все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член не равен нулю. Это значит, что исходная система не имеет решения.

Замечание. Для вычисления коэффициентов a_{ij}^k используют правило прямоугольника: рассматривают четыре элемента, находящиеся на пересечении строк и столбцов, в которых находятся разрешающий и искомый коэффициенты, а затем вычисляют разность между произведениями двух элементов: диагонали, содержащей разрешающий элемент, и побочной диагонали, и результат делят на разрешающий элемент.

МЕТОД ЖОРДАНА—ГАУССА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В методе Жордана — Гаусса расчеты проводят аналогично тому, как и в методе Гаусса, но решение системы получают сразу без проведения обратного хода. Исключаем x_1. Для этого рассматриваем систему уравнений, находим в 1-м уравнении системы отличный от нуля коэффициент при неизвестной ($a_{11} \neq 0$), производим первый шаг метода Гаусса, тогда коэффициенты при x_1 будут равны $a^1_{11} = 1$, $a^1_{21} = a^1_{31} = \cdots = a^1_{n1} = 0$.

Остальные коэффициенты a^1_{ij} ($i = 2, 3, \ldots, n$; $j = 2, 3, \ldots, n, 0$) вычисляют по известным формулам. Тогда получим систему уравнений

$$x_1 + a^1_{12}x_2 + \cdots + a^1_{1j}x_j + \cdots + a^1_{1n}x_n = a^1_{10};$$
$$a^1_{22}x_2 + \cdots + a^1_{2j}x_j + \cdots + a^1_{2n}x_n = a^1_{20};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^1_{i2}x_2 + \cdots + a^1_{ij}x_j + \cdots + a^1_{in}x_n = a^1_{i0};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^1_{n2}x_2 + \cdots + a^1_{nj}x_j + \cdots + a^1_{nn}x_n = a^1_{n0}.$$

Из этой системы исключаем x_2. Для этого во 2-м уравнении системы выбираем отличный от нуля коэффициент $\left(a^1_{22} \neq 0\right)$. Делим 2-е уравнение системы на a^1_{22} и получаем коэффициенты

$$a^2_{2j} = a^1_{2j}/a^1_{22} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, n, 0).$$

Остальные коэффициенты для новой системы вычисляем по правилу прямоугольника. Тогда получим систему уравнений

$$x_1 + a^2_{13}x_3 + \cdots + a^2_{1j}x_j + \cdots + a^2_{1n}x_n = a^2_{10};$$
$$x_2 + a^2_{23}x_3 + \cdots + a^2_{2j}x_j + \cdots + a^2_{2n}x_n = a^2_{20};$$
$$a^2_{33}x_3 + \cdots + a^2_{3j}x_j + \cdots + a^2_{3n}x_n = a^2_{30};$$
$$a^2_{43}x_3 + \cdots + a^2_{4j}x_j + \cdots + a^2_{4n}x_n = a^2_{40};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^2_{n3}x_3 + \cdots + a^2_{nj}x_j + \cdots + a^2_{nm}x_n = a^2_{n0}.$$

В этой системе все коэффициенты a^2_{i1} и a^2_{i2} при x_1 и x_2 равны нулю за исключением $a^2_{11} = a^2_{22} = 1$. Далее в системе проводим аналогичное преобразование, исключаем x_3, а затем x_4 и т. д.

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Каноническая форма задачи линейного программирования: найти такие x_1, x_2, ... x_n, при которых достигает минимума линейная функция

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to \min$$

и выполняются ограничения в виде линейных уравнений

$$a_{11} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = a_{01};$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = a_{02};$$
$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = a_{0m}$$

и неотрицательности переменных

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0.$$

Представление задачи линейного программирования в канонической форме удобно при использовании симплекс-метода для ее решения.

Стандартные формы задачи линейного программирования:

а) найти минимум линейной формы

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to \min$$

при ограничениях в виде неравенств

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &\geqslant a_{01}; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &\geqslant a_{02}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &\geqslant a_{0m}; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n &\geqslant 0; \end{aligned}$$

б) найти максимум линейной формы

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to \max$$

при ограничениях в виде неравенств

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &\leqslant a_{01}; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &\leqslant a_{02}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &\leqslant a_{0m}; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Сведение стандартной формы «а» задачи линейного программирования к канонической форме. Вводят такие дополнительные неотрицательные переменные $x_{n+1} \geqslant 0,\ x_{n+2} \geqslant 0, \ldots, x_{n+m} \geqslant 0$, при которых неравенства в ограничениях превращаются в равенства

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n - x_{n+1} &= a_{01}; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n - x_{n+2} &= a_{02}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n - x_{n+m} &= a_{0m}. \end{aligned}$$

Тогда получают каноническую форму задачи линейного программирования. Найти минимум линейной формы при ограничениях в виде линейных уравнений и неотрицательности переменных $x_1, \ldots, x_{n+m}$.

Сведение стандартной формы «б» задачи линейного программирования к канонической форме. Вводятся дополнительные неотрицательные переменные $x_{n+1} \geqslant 0,\ x_{n+2} \geqslant 0, \ldots, x_{n+m} \geqslant 0$, с помощью которых неравенства превращаются в соответствующие линейные уравнения

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n + x_{n+1} &= a_{01}; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n + x_{n+2} &= a_{02}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n + x_{n+m} &= a_{0m}. \end{aligned}$$

Тогда получают каноническую форму задачи линейного программирования. Найти минимум линейной формы

$$-c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n \to \min$$

при ограничениях в виде линейных уравнений и неотрицательности переменных $x_1, \ldots, x_{n+m}$.

Общая форма задачи линейного программирования: найти экстремум (максимум или минимум) линейной формы

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to \mathrm{extr}$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= a_{01}; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &= a_{02}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} &= a_{0m}; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{m+1,1} x_1 + a_{m+1,2} x_2 + \cdots + a_{m+1,n} x_n &\leqslant a_{0,m+1} \\ a_{m+2,1} x_1 + a_{m+2,2} x_2 + \cdots + a_{m+2,n} x_n &\leqslant a_{0,m+2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+k,1} x_1 + a_{m+k,2} x_2 + \cdots + a_{m+k,n} x_n &\leqslant a_{0,m+k}; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{m+k+1,1} x_1 + a_{m+k+1,2} x_2 + \cdots + a_{m+k+1,n} x_n &\geqslant a_{0,m+k+1}; \\ a_{m+k+2,1} x_1 + a_{m+k+2,2} x_2 + \cdots + a_{m+k+2,n} x_n &\geqslant a_{0,m+k+2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+k+e,1} x_1 + a_{m+k+e,2} x_2 + \cdots + a_{m+k+e,n} x_n &\geqslant a_{0,m+k+e}; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots,\ x_s \geqslant 0\ (s \leqslant n). \end{aligned}\right\}$$

В общей форме задачи линейного программирования m ограничений заданы в виде равенств; k ограничений — в виде неравенств $\leqslant 0$; e ограничений — в виде неравенств $\geqslant 0$; s переменных должны быть неотрицательными, а остальные $n - s$ переменных могут иметь произвольные знаки.

Сведение общей формы задачи линейного программирования к канонической форме. Если условие задачи выражает минимум

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min,$$

то целевая функция остается без изменений.

Если целевая функция максимизируется, то она записывается в виде

$$-c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n \to \min.$$

Вводят дополнительные неотрицательные переменные

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}, x_{n+k+1}, \ldots, x_{n+k+e},$$

с помощью которых неравенства превращаются в равенства

$$\left.\begin{aligned} a_{m+1,1} x_1 + a_{m+1,2} x_2 + \cdots + a_{m+1,n} x_n + x_{n+1} &= a_{0,m+1}; \\ a_{m+2,1} x_1 + a_{m+2,2} x_2 + \cdots + a_{m+2,n} x_n + x_{n+2} &= a_{0,n+2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+k,1} x_1 + a_{m+k,2} x_2 + \cdots + a_{m+k,n} x_n + x_{n+k} &= a_{0,m+k}; \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} a_{m+k+1,1} x_1 + a_{m+k+1,2} x_2 + \cdots + a_{m+k+1,n} x_n - x_{n+k+1} &= a_{0,m+k+1}; \\ a_{m+k+2,1} x_1 + a_{m+k+2,2} x_2 + \cdots + a_{m+k+2n} x_n - x_{n+k+2} &= a_{0,m+k+2}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+k+e,1} x_1 + a_{m+k+e,2} x_2 + \cdots + a_{m+k+e,n} x_n - x_{n+k+l} &= a_{0,m+k+e}. \end{aligned}$$

Чтобы получить все переменные неотрицательными, имеется два способа:

1. Для переменных $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$, имеющих произвольные знаки, вводят дополнительные неотрицательные переменные

$$x_{n+k+e+1},\ x_{n+k+e+2},\ \ldots,\ x_{2n+k+e-s};$$
$$x_{2n+k+e-s+1},\ x_{2n+k+e-s+2},\ \ldots,\ x_{3n+k+e-2s}$$

и ограничения в виде равенств

$$x_{s+1} = x_{n+k+e+1} - x_{2n+k+e-s+1};$$
$$x_{s+2} = x_{n+k+e+2} - x_{2n+k+e-s+2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_{2n+k+e-s} - x_{3n+k+e-2s}.$$

Теперь значения $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ подставим в соответствующие ограничения и целевую функцию и получим задачу линейного программирования в канонической форме. При этом способе будем иметь $s+k+e+2n-2s$ переменных.

2. Для того чтобы получить все переменные неотрицательными, в общей задаче линейного программирования следует выразить $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_{s+n}$ из соответствующих равенств через переменные $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и подставить их во все остальные неравенства и целевую функцию. Тогда получим задачу линейного программирования в канонической форме, в которой нет переменных $x_{s+1}, \ldots, x_n$. При этом способе имеется $(s+k+e)$ переменных, что на $(2n-2)s$ переменных меньше, чем при первом способе.

Это играет большую роль, так как с увеличением числа переменных значительно растет число вычислений, необходимых для получения решения задачи линейного программирования.

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В НОВОЙ ФОРМЕ

Эта форма характеризуется следующими признаками:

1. Система ограничений приведена к единичному базису с неотрицательными свободными членами.
2. Линейная форма (целевая функция) выражена через свободные переменные.
3. Все переменные неотрицательные.

Задача линейного программирования в новой форме записывается в виде

$$z = c_{0,r+1}x_{r+1} + c_{0,r+2}x_{r+2} + \cdots + c_{0,n}x_n + c_{00} \to \min$$

при ограничениях:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + b_{1,r+1}x_{r+1} + b_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + b_{1n}x_n = b_{01}; \\ x_2 + b_{2,r+1}x_{r+1} + b_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + b_{2n}x_n = b_{02}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + b_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + b_{rn}x_n = b_{0r}; \end{array}\right\}$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0, \ b_{01} \geqslant 0, \ b_{02} \geqslant 0, \ldots, b_{0r} \geqslant 0,$$

где r — число базисных переменных $x_1, \ldots, x_r$. Сведение канонической формы линейного программирования к новой форме состоит в следующем.

Систему ограничений с помощью метода симплексного преобразования (он будет описан ниже) приводят к единичному базису с неотрицательными свободными членами. Затем базисные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ выражают через свободные переменные

$$x_1 = b_{01} - (b_{1,r+1}x_{r+1} + b_{1,r+2}x_{r+2} + \ldots + b_{1n}x_n);$$
$$x_2 = b_{02} - (b_{2,r+1}x_{r+1} + b_{2,r+2}x_{r+2} + \ldots + b_{2n}x_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_r = b_{0r} - (b_{r,r+1}x_{r+1} + b_{r,r+2}x_{r+2} + \ldots + b_{rn}x_n),$$

подставляют их в целевую функцию

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$$

и получают

$$c_{00} = \sum_{i=1}^{r} c_i\, b_{0i};\ c_{0,r+k} = -\sum_{i=1}^{r} c_i\, b_{i,r+k} + c_{r+k}\ (k = 1, 2, \ldots, n - r).$$

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЛАНА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В НОВОЙ ФОРМЕ

Если в задаче линейного программирования в новой форме на минимум целевой функции

$$z = c_{0,r+1}\, x_{r+1} + c_{0,r+2}\, x_{r+2} + \ldots + c_{0,n}\, x_n + c_{00} \to \min$$

все значения коэффициентов в целевой функции при свободных переменных неотрицательные

$$c_{0,r+1} \geqslant 0,\ c_{0,r+2} \geqslant 0, \ldots, c_{0,n} \geqslant 0,$$

то план $x_1 = b_{01}, x_2 = b_{02}, \ldots, x_r = b_{0r}, x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$ является оптимальным.

Если же в задаче линейного программирования в новой форме на минимум целевой функции z хотя бы один из коэффициентов $c_{0j} < 0$ при свободных переменных и в j-м столбце ограничений имеется хотя бы один положительный коэффициент, то план $x_1 = b_{01}$, $x_2 = b_{02}, \ldots, x_2 = b_{0r}$, $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$ не оптимальный и его можно улучшить.

Если в задаче линейного программирования в новой форме на максимум целевой функции

$$z = c_{0,r+1}\, x_{r+1} + c_{0,r+2}\, x_{r+2} + \ldots + c_{0,n}\, x_n + c_{00} \to \max$$

все значения коэффициентов в целевой функции при свободных переменных неположительные

$$c_{0,r+1} \leqslant 0,\ c_{0,r+2} \leqslant 0, \ldots, c_{0,n} \leqslant 0,$$

то план $x_1 = b_{01}$, $x_2 = b_{02}, \ldots, x_r = b_{0r}, x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0$ является оптимальным.

Если же в задаче линейного программирования в новой форме на максимум целевой функции z хотя бы один из коэффициентов $c_{0j} > 0$ при свободных переменных в целевой функции, то план $x_1 = b_{01}, \ldots, x_2 = b_{0r}$, $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$ не является оптимальным. Его можно улучшить, если в j-м столбце ограничений имеется положительный коэффициент.

СИМПЛЕКС-МЕТОД (ПРЯМОЙ) ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА

Рассматривают задачу линейного программирования в новой форме (на минимум целевой функции). Симплекс-метод состоит из последовательности итераций. Проверяют, является ли опорный план оптимальным

$$x_1 = b_{01},\ x_2 = b_{02}, \ldots, x_r = b_{0r},\ x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_n = 0.$$

Если условие оптимальности $c_{0,r+1} \geqslant 0$; $c_{0,r+2} \geqslant 0, \ldots, c_{0n} \geqslant 0$ выполнено, то данный опорный план оптимальный и итерации заканчиваются.

Если условие оптимальности не выполнено, т. е. среди коэффициентов $c_{0,r+1}, c_{0,r+2}, \ldots, c_{0n}$ имеются отрицательные, то сначала отыскивается переменная x_l, которую надо ввести в базис по правилу: x_l соответствует свободной переменной, находящейся при минимальном коэффициенте $c_{0,r+j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, теперь применяют правило однократного замещения, т. е. определяют переменную x_p, которую надо вывести из базиса; определяется та строка p, для которой отношение свободного члена к соответствующему положительному коэффициенту l-го столбца является наименьшим,

$$\frac{b_{0p}}{b_{pl}} = \min \frac{b_0}{b_{sl}} \quad (\text{для тех } s, \text{ при которых } b_{sl} > 0).$$

Если среди b_{sl} нет положительных, то задача неразрешима. Если есть такие числа, то можно выбрать p-ю строку, соответствующую переменной, которую надо исключить из базиса. Проводят шаг по методу Жордана—Гаусса с разрешающим элементом b_{pl}, т. е. получают новые элементы b^1_{ij} матрицы ограничений для задачи линейного программирования в новой форме

$$b^1_{pl} = 1; \; b^1_{0p} = \frac{b_{0p}}{b_{pl}}, \quad b^1_{pj} = \frac{b_{pj}}{b_{pl}} \quad (j = r+1, r+2, \ldots, l-1, l = 1, \ldots, n);$$

$$b^1_{ij} = \frac{b_{ij}\, b_{pl} - b_{il}\, b_{pj}}{b_{pl}} \quad (i \neq p, \; j = r+1, \; r+2, \ldots, l-1, \; l+1, \ldots, n);$$

$$b_{il} = 0 \qquad (i \neq p)$$

и коэффициенты целевой функции

$$c^1_{0j} = \frac{c_{0j}\, b_{pl} - b_{il}\, c_{pj}}{b_{pl}} \quad (j = r+1, \; r+2, \ldots, \; l-1, \; l+1, \ldots, n, 0),$$

т. е. получают следующую задачу линейного программирования

$$z^1 = \sum_{\substack{j=r+1 \\ j \neq l}} c^1_{0,r+j}\, x_{r+j} + c^1_{0p}\, x_p + c^1_{00}$$

при ограничениях

$$x_1 + b^1_{1,r+1}\, x_{r+1} + \cdots + b^1_{1,l-1}\, x_{l-1} + b^1_{1p}\, x_p + b^1_{1,l+1}\, x_{l+1} + \\ + \cdots + b^1_{1n}\, x_n = b^1_{01};$$

. . . .

$$x_{p-1} + b_{p-1,r+1}\, x_{r+1} + \cdots + b^1_{p-1,\, l-1}\, x_{l-1} + b^1_{p-1,p}\, x_p + b^1_{p-1,l+1} \times \\ \times x_{l+1} + \cdots + b^1_{p-1,n}\, x_n = b^1_{0p-1};$$

$$x_l + b^1_{l,r+1}\, x_{r+1} + \cdots + b^1_{l,l-1}\, x_{l-1} + b^1_{lp}\, x_p + b_{l,l+1}\, x_{l+1} + \cdots + \\ + b^1_{l,n}\, x_n = b^1_{0l};$$

$$x_{p+1} + b^1_{p+1,r+1}\, x_{r+1} + \ldots + b^1_{p+1,l-1}\, x_{l-1} + b^1_{p+1,p}\, x_p + b^1_{p+1,l+1} \times \\ \times x_{l+1} + \cdots + b_{p+1,n}\, x_n = b^1_{0p+1};$$

. . . .

$$x_r + b^1_{r,r+1}\, x_{r+1} + \cdots + b_{r,l-1}\, x_{l-1} + b^1_{rp}\, x_p + b^1_{r,l+1}\, x_{l+1} + \\ + \cdots + b_{r,n}\, x_n = b^1_{0,r}.$$

На этом итерация заканчивается. Последовательное применение таких итераций как правило приводит к получению оптимального плана. При проведении итераций может произойти зацикливание, т. е. возвращение к прежнему базису при неоптимальном плане. Для устранения зацикливания можно незначительно изменить правую часть одного равенства в ограничении задачи. Для применения прямого симплекс-метода необходимо иметь начальное опорное решение или выразить задачу линейного программирования в новой форме.

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ОПОРНОГО ПЛАНА (СИМПЛЕКС-МЕТОД С ИСКУССТВЕННЫМ БАЗИСОМ)

Рассматривают задачу линейного программирования в канонической форме

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{0i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Если среди a_{0i} есть отрицательные, то соответствующие им уравнения умножают на (—1) и получают задачу линейного программирования в виде

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j = b_{0i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

где все $b_{0i} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Далее вводят дополнительные искусственные неотрицательные переменные $x_{n+i} \geqslant 0$ таким образом, что данная задача превращается в эквивалентную задачу

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j + x_{n+i} = b_{0i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n+m),$$

где M — некоторое большое положительное число; x_{n+i} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ составляют искусственный базис.

Теперь, применяя итерации прямого симплекс-метода к этой задаче, получим оптимальное решение, в котором должны быть все $x_{n+i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а остальные переменные x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ дадут оптимальное решение исходной задачи линейного программирования.

Если окажется, что в оптимальном плане эквивалентной задачи среди дополнительных переменных x_{n+i} есть хотя бы одно положительное, то

исходная задача не имеет решения. Если для исходной задачи линейного программирования необходимо получить только опорное решение, то при итерациях прямого симплекс-метода для эквивалентной задачи достаточно остановиться тогда, когда все дополнительные (искусственные) переменные будут выведены из базиса. Для получения опорного решения исходной задачи линейного программирования в канонической форме достаточно рассматривать решение следующей задачи линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j + x_{n+i} = b_{0i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n+m).$$

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Найти максимум линейной формы

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

неотрицательности переменных $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и целочисленности $x_j =$ целое $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Обозначим L — множество значений векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих линейным ограничениям задачи целочисленного программирования и условиям неотрицательности переменных; L_1 — подмножество значений векторов из L, удовлетворяющих условию целочисленности переменных. Любой вектор $x \in L_1$ называется планом задачи линейного целочисленного программирования. Вектор $x^* \in L_1$, обращающий z в максимум, называется оптимальным планом задачи целочисленного линейного программирования.

Обозначим $x(L, z)$ — оптимальный план задачи линейного программирования без условия целочисленности

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, 2, \cdots, m), \ x_j \geqslant 0.$$

Обозначим $x(L_1, z)$ — оптимальный план задачи линейного целочисленного программирования.

Дробной частью $\{x\}$ числа x называется $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть x, т. е. наибольшее целое число, не превышающее x.

АЛГОРИТМ ГОМОРИ (ПЕРВЫЙ) ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Начальная итерация. Решают задачу линейного программирования без условия целочисленности, т. е. находят $x(L, z)$. Если эта задача не разрешима, то не существует и решения $x(L_1, z)$ целочисленной задачи линейного программирования. Если $x(L, z)$ существует и удовлетворяет условию целочис-

ленности, то $x(L, z) = x(L_1, z)$, т. е. является одновременно и оптимальным планом задачи целочисленного линейного программирования.

Если же $x(L, z)$ нецелочисленное, то переходят к r-й итерации, которая состоит в следующем: пусть на $(r-1)$-й итерации получен нецелочисленный оптимальный план $x^{r-1}(L, z)$ задачи линейного программирования без условия целочисленности. Тогда выражают целевую функцию z и базисные переменные x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ через свободные переменные

$$x_j \ (i \in N_r); \ x_i = b_{i0}^r + \sum_{j \in N_r} b_{ij}^r (-x_j) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где b_{i0}^r — свободные члены; b_{ij}^r — коэффициенты при переменных в линейных ограничениях последней симплексной таблицы, полученной для оптимального плана, и выбирают наименьшую по номеру строку, которой соответствует нецелочисленная переменная в этом плане. Пусть эта строка имеет номер k, тогда строят дополнительное ограничение (отсечение), сохраняющее все целочисленные значения переменных из множества L и отсекающее часть нецелочисленных значений, в виде следующей строки:

$$x_{n+r+1} = -\left\{b_{k0}^r\right\} + \sum_{j \in N_r} \left\{b_{kj}^r\right\} x_j, \ x_{n+r+1} \geqslant 0,$$

где x_{n+r+1} — целое. Эту строку приписывают снизу к симплексной таблице, полученной на —$(r-1)$-й итерации. К полученной расширенной симплексной таблице применяют симплекс-метод. После вывода x_{n+r+1} из базиса соответствующая строка вычеркивается, а после введения в базис x_l $(l \geqslant n+1)$ соответствующая строка не восстанавливается.

Если в итоге получим, что полученная задача линейного программирования неразрешима, то и задача целочисленного линейного программирования также неразрешима. Если же получают оптимальное решение задачи линейного программирования, то проверяют его на целочисленность. Если полученное решение целочисленное, то оно и есть искомое решение поставленной задачи. Если же в полученном решении имеется нецелочисленное значение переменной, то переходим к $(r+1)$-й итерации.

Если гарантирована целочисленность целевой функции и она ограничена снизу или задача имеет хотя бы один целочисленный план, то приведенный алгоритм Гомори за конечное число шагов приводит к решению задачи. Следует отметить, что применение этого алгоритма на практике связано с большим количеством вычислений.

ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Постановка задачи: минимизировать $z = f(x)$ при условии $x \in G$, где G — некоторое конечное множество. Наиболее простой метод решения этой задачи состоит в полном переборе всех значений x из множества G вычислений всех значений функции $f(x)$ и выборе из них наименьшего. Этот способ неприменим, если число элементов множества G большое. Для сокращения перебора элементов множества G предложен универсальный метод ветвей и границ. Этот метод позволяет отбрасывать часть элементов множества G без ущерба для отыскания минимума функции $f(x)$. Эффективность этого метода зависит от способов ветвления и построения границ, позволяющих выбрасывать из рассмотрения подмножеств элементов множества G.

МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

1. Вычисление нижней границы (оценки) для функции $f(x)$ на некотором множестве G_0, т. е. нахождение такого числа M, что $f(x) \geqslant M$ для $x \in G_0$. Чем точнее получено M, тем эффективнее метод.

2. Ветвление, т. е. разбиение множества G на подмножества.

Вычисления согласно этому методу проводят по шагам.

0-й шаг — имеется множество $G_0 = G$, которое разбивается на подмножества (непересекающиеся)

$$G_1^1, G_2^2, \ldots, G_{r_1}^1,$$

k-й шаг — имеются множества $G_1^k, G_2^k, \ldots, G_{r_k}^k$, еще не подвергавшиеся ветвлению. По некоторому правилу среди них выбирается множество $G_{\nu(k)}^k$ и разбивается на конечное число подмножеств $G_{\nu(k),1}^k, G_{\nu(k),2}^k, \ldots, G_{\nu(k),s(k)}^k$.

Множества $G_1^k, C_2^k, \ldots$, еще не подвергавшиеся ветвлению, заново обозначаются через $G_1^{k+1}, G_2^{k+1}, \ldots, G_{r_{k+1}}^{k+1}$.

3. Пересчет оценок. Если множество $G_1 \subset G_2$, то очевидно $\min\limits_{x \in G_1} f(x) \geqslant \min\limits_{x \in G_2} f(x)$. Поэтому, разбивая в процессе решения некоторсе множество G^1 на подмножества $G_1^1, G_2^1, \ldots, G_s^1$, всегда считается, что оценка (граница) для любого множества G_i^1 не меньше оценки для G^1, т. е.

$$M(G_i^1) \geqslant M(G^1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

где $M(A)$ — оценка функции $f(x)$ на множестве A. Часто можно получить улучшение оценки, т. е. хотя бы для некоторых i будет $M(G_i^1) > M(G^1)$.

4. Вычисление планов. Для конкретных задач указывают способы нахождения планов в последовательно разветвляемых подмножествах. Эти способы зависят от вида задачи.

5. Оценка точности приближенного решения. Пусть $R = \bigcup\limits_{i=1}^{s} G_i$, $M = \min\limits_{i} \times$ $\times (G_i)$. Если $\bar{x}$ — некоторый план исходной задачи, то

$$M \leqslant \min_{x \in G} f(x) \leqslant f(\bar{x}).$$

Если $\Delta = f(\bar{x}) - M$ невелико, то x можно принять за приближенное решение, а Δ — за оценку точности приближения.

Алгоритм решения задачи $z = f(x) \to \max$ при условии $x \in G$ состоит в последовательном осуществлении шагов.

0-й шаг — вычисляют оценку $M(G) = M(G^0)$. Если при этом удается такой план $\bar{x}$, что $f(\bar{x}) = M(G)$, то $\bar{x}$ — оптимальный. Если же оптимальный план не найден, то разбивают множество $G = G^0$ на конечное число подмножеств $G_1^1, G_2^1, \ldots, G_{r_1}^1$ так, что их объединение равно множеству G.

1-й шаг — вычисляют оценки $M(G_i^1)$ $(i = 1, 2, \ldots, r_1)$. Если при этом удается найти такой план $\bar{x}$, что $\bar{x} \in G_r^1$ для некоторого r $(1 \leqslant r \leqslant r_1)$ и $f(\bar{x}) = M(G_2^1) \leqslant M(G_i^1)$ $(i = 1, 2, \ldots, r_1)$, то $\bar{x}$ — оптимальный план. Если $\bar{x}$ не оптимальный, то для дальнейшего ветвления выбирают наиболее подходящее множество с наименьшей оценкой

$$M(G_{\nu_1}^1) = \min_{1 \leqslant i \leqslant r_1} M(G_i^1).$$

Разбивают множество $G^1_{\nu(1)}$ на несколько подмножеств

$$G^1_{\nu(1)} = G_{\nu(1),1} \cup G^1_{\nu(1),2} \cup, \ldots, \cup G^1_{\nu(1),\ s(1)}.$$

Остальные не подвергавшиеся разбиению множества

$$G^1_1,\ G^1_2, \ldots,\ G^1_{\nu(1)-1},\ G^1_{\nu(1)+1}, \ldots,\ G^1_{r_1},\ G^1_{\nu(1),1}, \ldots,\ G^1_{\nu(1),\ s(1)}$$

заново обозначают через $G^2_1,\ G^2_2, \ldots,\ G^2_{r_2}$ и переходят ко 2-му шагу.

k-й шаг ($k \geqslant 2$) — вычисляют оценки $M(G^k_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, r_k$). Если при этом удается найти такой план $\bar{x} \in G^k_r$ для некоторого r ($1 \leqslant r \leqslant r_k$), что $f(\bar{x}) = M(G^k_r) \leqslant M(G^k_i)$ $i = 1, 2, \ldots, r_k$, то $\bar{x}$ — оптимальный. Если $\bar{x}$ не оптимальный, то снова выбирают множество $G^k_{\nu(k)}$, для которого оценка наименьшая

$$M(G^k_{\nu(k)}) = \min_{1 \leqslant i \leqslant r_k} M(G^k_i),$$

и разбивают $G^k_{\nu(k)}$ на несколько непересекающихся подмножеств

$$G_{\nu(k)} = G^k_{\nu(k),1} \cup G^k_{\nu(k),2} \cup, \ldots, \cup G^k_{\nu(k),\ s(k)}.$$

Множества, не подвергавшиеся разбиению,

$$G^k_1,\ G^k_2, \ldots,\ G^k_{\nu(k)-1},\ G^k_{\nu(k)+1}, \ldots,\ G^k_{r(k)},\ G^k_{\nu(1),\ 1}, \ldots,\ G^k_{\nu(k),\ s(k)}$$

заново обозначают через $G^{k+1}_1,\ G^{k+1}_2, \ldots,\ G^{k+1}_{r_{k+1}}$ и переходят к $(k+1)$-му шагу.

Разновидности метода ветвей и границ состоят в различных методах ветвления и вычисления оценок в зависимости от конкретных задач.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Пусть имеется m пунктов, из которых надо доставить продукцию в n пунктов потребителям при минимальных транспортных затратах.

Модель задачи. Найти такой план $x_{ij} \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) при котором достигается минимум затрат на перевозку

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

и выполняются ограничения:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Такая транспортная задача всегда имеет решение.

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЛАНА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Для оптимальности плана $x_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ необходимо и достаточно существование чисел v_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ таких, что

$$v_j = u_i \leqslant C_{ij} \ (i = 1, 2, \ldots, ; j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$v_j - u_i = C_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0.$$

Числа v_j и u_i называют потенциалами пунктов задачи.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Он состоит из двух этапов:

1. Отыскание опорного плана.
2. Улучшение опорного плана до тех пор, пока получат оптимальный.

Существует несколько методов отыскания опорного плана. Для изложения этих методов вводят такие понятия.

Коммуникация — это перевозки из одного пункта в другой.

Последовательность коммуникаций, при которой перевозка начинается в одном пункте, проходит через некоторые другие пункты и заканчивается в определенном пункте, называется маршрутом. Замкнутым маршрутом называется такой маршрут, который начинается и заканчивается в одном пункте.

Основной коммуникацией плана называется коммуникация, по которой перевозят продукт, т. е. коммуникация ij — основная, если для нее $x_{ij} > 0$. План транспортной задачи — опорный, если из его основных коммуникаций невозможно составить замкнутый маршрут.

Опорный план задачи называется невырожденным, если все его $n + m - 1$ значения $x_{ij} > 0$. Опорный план, в котором хотя бы одно значение $x_{ij} = 0$,— вырожденный.

Метод минимального элемента. Он состоит из следующих шагов.

1-й шаг — определяют минимальный элемент матрицы C транспортных затрат. Если им оказался $c_{i_1 j_1}$, то полагаем $x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1})$.
Возможны два случая: 1) $a_{i_1} \leqslant b_{j_1}$, тогда определяем элементы i_1-й строки матрицы плана X, полагая $x_{i_1 j} = 0$ для $j \neq j_1$; 2) $a_{i_1} > b_{j_1}$, тогда в матрице X полагаем нулями элементы j_1-го столбца, т. е. $x_{i j_1} = 0$, $i \neq i_1$.

2-шаг — пусть C_1 — матрица, полученная из C вычеркиванием либо i_1-й строки (случай 1), либо j_1-го столбца (случай 2).

Положим

$$a_i^1 = \begin{cases} a_i & \text{при } i \neq i_1; \\ a_i - x_{i_1 j_1} & \text{при } i = i_1; \end{cases}$$

$$b_j^1 = \begin{cases} b_j & \text{при } j \neq 1; \\ b_j - x_{i_1 j_1} & \text{при } j = j_1. \end{cases}$$

Общее число строк и столбцов матрицы C_1 на единицу меньше числа строк и столбцов матрицы C.

2-й шаг состоит в проведении вышеописанных операций применительно к матрице C_1 и величинам a_i^1, b_j^1. В результате этого шага заполняется еще одна линия (строка или столбец) матрицы X. Затем следует 3-й шаг и т. д.

до тех пор, пока заполнится матрица X. Этот метод приводит к опорному плану, число шагов при этом равно $n + m - 1$. Этот метод часто приводит к получению опорного шага более близкого к оптимальному, чем при методе «Северо-западного угла».

Метод потенциалов для нахождения оптимального плана транспортной задачи. Пусть проведено k итераций метода потенциалов и получен опорный невырожденный план транспортной задачи x_{ij}^k $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$. Следующая $(k + 1)$-я итерация состоит из шагов.

1-й шаг — исследование плана на оптимальность: выделяют множество R_k тех значений C_{ij}, для которых $x_{ij}^k > 0$, и находят потенциалы u_i^k $(i = 1, 2, \ldots, m)$, v_j^k $(j = 1, 2, \ldots, n)$ путем решения системы уравнений

$$v_j^k - u_i^k = C_{ij} \quad (C_{ij} \in R_k).$$

Полагают $u_1^k = 0$, тогда находят v_j^k. Зная v_1^k, можно найти u_2^k и т. д. Если полученные значения v_j^k, u_i^k таковы, что для любой пары i, j имеет место неравенство

$$v_j^k - u_i^k \leqslant C_{ij},$$

то соответствующий (полученный) план x_{ij}^k оптимальный. Если же для некоторых пар i, j имеет место неравенство

$$v_j^k - u_i^k > C_{ij},$$

то план x_{ij}^k не оптимальный и его надо улучшить, т. е. перейти ко 2-му шагу.

2-й шаг — вычисляют уклонения

$$C_{ij}^{k+1} = C_{ij} - (v_j^k - u_i^k).$$

По условию среди чисел C_{ij}^{k+1} имеются отрицательные. Определяют пару индексов i_0, j_0, для которой

$$C_{i_0 j_0}^{k+1} = \min_{ij} C_{ij}^{k+1}$$

(в качестве $C_{i_0 j_0}^{k+1}$ можно принять любые отрицательные уклонения). Соединяют пункты i_0 и j_0 маршрутом из основных коммуникаций плана x_{ij}^k. Пусть эти пункты $i_0, j_1, i_1, j_2, \ldots, j_{s-1}, i_s, i_0$ рассматривают перевозки по тем коммуникациям маршрута, которые при движении от i_0 к j_0 проводятся в положительном направлении, т. е. от пункта производства к пункту потребления. Минимальная среди них перевозка

$$Q_k = \min x_{i_r j_r} \quad (i_0 = i_1,\ j_0 = j_s).$$

Вводят в план x_{ij}^k следующие изменения: величины перевозок из i_r в j_r $(r = 1, 2, \ldots, s)$ уменьшают на Q_k, а величины перевозок из i_{r+1} в j_r $(r = 1, 2, \ldots, s - 1)$ увеличивают на Q_k (здесь $i_0 = i_1$, $j_0 = j_s$). Кроме того, вводят новую перевозку между пунктами i_0, и j_0, равную Q_k. Полученная новая совокупность перевозок x_{ij}^{k+1} является опорным планом, для которого общие затраты на перевозки продукта меньше, чем согласно предыдущему плану x_{ij}^k.

Далее снова применяют 1-й и 2-й шаги для $(k+1)$-й итерации до тех пор пока получают оптимальный план. Если план x_{ij}^{k} вырожденный, т. е. среди $n+m-1$ опорных значений плана x_{ij}^{k} имеются значения x_{ij}^{k}, равные нулю, то применение 1-го и 2-го шагов метода потенциалов приводит к значению $Q_k=0$, что не приводит к уменьшению общих затрат на перевозки, но все же меняет опорный план. Действуя методом потенциалов и в случае вырожденности опорного плана, также можно получить оптимальный план. Однако встречаются и случаи зацикливания, когда при вырожденности опорного плана метод потенциалов приведет к прежнему вырожденному плану и, таким образом, процесс зацикливается и не приводит к оптимальному плану. Такие случаи редкие, но имеют место. Для избежания зацикливания обычно немного изменяют некоторые исходные значения a_l, b_j так, чтобы достоверность задачи не терялась, и проводят оптимизацию методом потенциалов.

КВАДРАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Даны две квадратные матрицы $A=\|a_{ij}\|$, $C=\|c_{ij}\|$. В матрице C производится перестановка строк и столбцов согласно подстановке

$$T=\left\{\begin{matrix}1, 2, \ldots, n\\ t_1, t_2, \ldots, t_n\end{matrix}\right\}.$$

Тогда матрица C будет $C(T)=\|c_{t_it_j}\|$. Требуется найти минимум функции от T

$$M(A, C(T))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{t_it_j},$$

т. е. найти такую подстановку T^*, при которой $M(A, C, (T))$ будут наименьшими,

$$\min_{T} M(A, C(T))=M(A, C(T^*)).$$

Сформированная таким образом задача называется квадратической задачей о назначениях, для ее решения нет точных эффективных методов, однако имеются приемлемые приближенные методы. Поскольку число всех перестановок конечное, то этот минимум существует. Следовательно, можно перебрать все перестановки, вычислить для них значение $M(A, C(T))$ и выбрать из них перестановку T^*, которая дает минимум $M(A, C(T))$. Однако этот путь пригоден только при малых значениях n. Как известно, число всех перестановок из n элементов равно $n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots 3\,n$. Число перестановок очень быстро растет с ростом n. Поэтому целесообразнее построить метод не сплошного, а направленного перебора подстановки таким образом, чтобы, перебрав лишь часть перестановок, можно было получить либо достаточное приближение к минимальному значению, либо абсолютное минимальное значение.

Приведем один из возможных вариантов направленного поиска подстановки, минимизирующей $M(A, C(T))$. Так как каждую подстановку T можно получить из любой другой подстановки с помощью не более чем n последовательных перестановок пар элементов, то можно уменьшить значения $M(A, C(T))$ с помощью перестановок пар элементов. Возьмем в качестве исходной подстановки единичную E и поменяем местами r-й и s-й элементы, в результате получим подстановку

$$T_{rs}=\left\{\begin{matrix}1 & 2\ldots & r-1 & r & r+1\ldots & s-1 & s & s+1 & \ldots n\\ 1 & 2\ldots & r-1 & s & r+1\ldots & s-1 & r & s+1 & \ldots n\end{matrix}\right\}$$

и матрицу $C(T_{rs})$.

Затем вычислим разность

$$L(A,\ C(T_{rs})) = M(A,\ C(T_{rs})) - M(A,\ C) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq rs}}^{n} [a_{ir} - a_{is})(c_{is} - c_{ir}) + (a_{ri} - a_{si})(c_{si} - c_{ri})] + (a_{rs} - a_{sr})(c_{sr} - c_{rs}) + (a_{rr} - a_{ss})(c_{ss} - c_{rr}).$$

Если матрица $C = \| c_{ij} \|$ симметрична, то эту формулу можно упростить

$$L(A,\ C(T_{rs})) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r,\ s}} (c_{is} - c_{ir})(a_{ir} - a_{is} + a_{ri} - a_{si}).$$

Если среди значений функции $L(A,\ C(T_{rs}))$ имеются отрицательные при некоторых значениях r и s, то выбираем такие r_1, s_1, при которых функция $L(A,\ C(T_{rs}))$ достигает минимума, и образуем новую матрицу $C(T_{r_1s_1}) = C_1$ из матрицы C путем перестановок в ней r_1-й и s_1-й строк, а затем таких же столбцов. Далее снова для матрицы C делаем перестановки пар элементов, т. е. вычисляем $L(A,\ C_1(T_{rs}))$ и снова делаем перестановку пар r_2, s_2, для которых функция $L(A,\ C_1(T_{rs}))$ принимает наименьшее отрицательное значение (если имеются отрицательные значения). И так поступаем до тех пор, пока получим некоторую матрицу C_k, для которой

$$L(A,\ C_k(T_{rs})) \geqslant 0.$$

Общая перестановка T_1 составляется из перестановок пар элементов, образующих матрицу C_k. Вычисляем значение локального минимума $M(A,\ C_k) = M_1$. Далее можно организовать случайный поиск. Например, выбирается случайно подстановка T, согласно которой формируют матрицу $C(T)$ и считают ее исходной. Для этой матрицы снова находят локальный минимум относительно перестановок пар элементов и вычисляют его значение. Если этот локальный минимум меньше, чем M_1, то снова выбирают случайную подстановку T и снова проводят такие же вычисления. Такая процедура проводится до тех пор, пока получается несколько совпадений наименьших значений локальных минимумов. В качестве решения выбирается это наименьшее значение. Такой метод не гарантирует получения абсолютного минимума, однако он дает существенное приближение, что очень важно для практики.

ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА (О ПЕРЕНАЛАДКАХ)

Коммивояжер выезжает из одного города, должен побывать только один раз в определенных других городах и возвратиться в исходный город. При этом он должен избрать маршрут с минимальной общей длиной. Математическая задача ставится так: имеется матрица расстояний между городами $C = \| C_{ij} \|$ порядка n, где n — число городов.

Пусть матрица

$$P = \| p_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

определяет маршрут следования: из 1-го города во 2-й, из 2-го в 3-й, из 3-го в 4-й и т. д., наконец из n-го в 1-й. Каждая перестановка

$$T = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{Bmatrix}$$

строк и столбцов в матрице P образует матрицу $P(T) = \| p_{t_i t_j} \|$ и будет задавать маршрут следования коммивояжера, начинающийся и кончающийся в 1-м городе. Общая длина пути

$$M(T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_{t_i t_j}.$$

Требуется определить такую подстановку T^*, при которой общая длина пути будет наименьшей, т. е.

$$M(T^*) = \min_T M(T).$$

Заметим, что если сделать перестановку T строк и столбцов в матрице C и получить $C(T) = \| c_{t_i t_j} \|$, то

$$M(C(T)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{t_i t_j} p_{ij} = M(T)$$

будет такой же, как и при перестановке T в матрице P. Обратная подстановка $(T^*)^{-1}$ укажет оптимальный маршрут. Очевидно такая задача коммивояжера является частным случаем квадратической задачи о назначениях, для которой можно применить метод решения. Однако учитывая специфику данной задачи, алгоритм ее решения можно улучшить. С этой целью заметим, что

$$M(B(T)) = M(C(T)) + v + u,$$

где $B = \| b_{ij} \| = \| c_{ij} + v_i + u_j \|$, причем u_j, v_i $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — любые действительные числа;

$$v = \sum_{i=1}^{m} v_{t_i} = \sum_{i=1}^{m} v_i; \quad u = \sum_{j=1}^{m} u_{t_j} = \sum_{j=1}^{m} u_j,$$

$$\text{т. е.} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{t_i t_j} p_{ij} \text{ и } \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} b_{t_i t_j} p_{ij}$$

отличаются на постоянную величину $v + u$, не зависящую от перестановок T, поэтому их минимальные значения достигаются на одной и той же подстановке. С другой стороны, известен следующий результат: если два вектора $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ таковы, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m$ $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_m$, то, переставляя местами элементы в одном из векторов согласно подстановки T и вычисляя их скалярные произведения

$$\sum_{i=1}^{m} a_{t_i} p_i,$$

получим, что

$$\min_T \sum_{i=1}^{m} a_{t_i} p_i = \sum_{i=1}^{m} a_i p_i.$$

Другими словами, если в одном векторе элементы не возрастают, а во втором — не убывают, то скалярное произведение этих векторов будет мини-

мальным среди всех скалярных произведений этих векторов с учетом, что в одном из них производятся всевозможные перестановки компонент. Теперь сформулируем достаточные условия минимума для скалярного произведения матриц $C(T)$ и P для того, чтобы сумма

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}p_{ij} = c_{m1} + \sum_{i=1}^{m-1} c_{i,\,i+1}$$

была минимальной среди сумм $C(T)$. Достаточно существование таких чисел $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$, для которых выполняются неравенства $c_{i,\,i+1} + v_i + u_{i+1} \leqslant c_{rs} + v_r + u_s$ при $s \neq r$, $s \neq r+1$ $(i, r, s = 1, 2, \ldots, m)$; индекс $m+1$ считается равным 1, т. е. $c_{m,\,m+1} = c_{m1}$; $u_{m+1} = u_1$. Действительно, пусть существует решение этой системы неравенств. Это значит, что элементы $b_{ij} = c_{ij} + v_i + u_j$ таковы, что $b_{i,\,i+1} \leqslant b_{rs}$ $(r \neq s,\ s \neq r+1,\ i, r, s = 1, 2, \ldots, m)$. Рассматривая теперь матрицы B и P соответственно как векторы u и p с m^2 компонентами, получим, что для них выполняется условие минимума, поэтому

$$\min_T M(B(T)) = \min_T \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{t_i t_j}p_{ij} = b_{12} + b_{23} + \cdots + b_{m-1m} + b_{m1}.$$

Но $M(B(T))$ достигает минимума на той же подстановке, что и $M(C(T))$, поэтому также

$$\min_T M(C(T)) = c_{12} + c_{23} + \cdots + c_{(m-1)m} + c_{m1}.$$

Таким образом, достаточное условие минимума сводится к проверке совместности системы линейных неравенств. Для этой цели имеются определенные методы. Вообще, часто можно использовать более простое достаточное условие, заключающееся в проверке совместности системы неравенств относительно неизвестных v_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, полагая $u_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Для построения алгоритма нахождения искомой подстановки введем определение.

Определение. Пусть подстановка $T_x, T_y, \ldots, T_z$ состоит соответственно из перестановок элементов $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_e\}$, ..., $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_g\}$ множества чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$. Эти подстановки назовем незацепленными, если $w_i \neq \tau_j$, $w_j \neq \tau_j + 1$, где w_i, τ_j — любая пара чисел из разных подмножеств $x, y, \ldots, z$. Например, если $w_i = x_i$, то в качестве τ_j может быть взят любой элемент из множеств $y, \ldots, z$, но не из множеств x.

В частности, транспозиции T_{r_1, s_1}, $T_{r_2 s_2}, T_{r_k s_k}$, т. е. перестановки только пар элементов, указанных в индексах, являются незацепленными, если все числа $r_1, r_2, \ldots, r_k$; $s_1, s_2, \ldots, s_k$ разные и $r_i \neq r_j \pm 1$, $r_i \neq s_j \pm 1$, $s_i \neq r_i \pm 1$, $s_i \neq s_j \pm 1$ при $i, j = 1, 2, \ldots, m$ (здесь по-прежнему индекс $m+1$ равен индексу 1). Теперь изложим алгоритм по шагам.

1-й шаг — вычисляем значения функции для $r < s$ и $s \neq r+1$:

$$L(C(T_{r,s}) = M(C(T_{r,s})) - M(C(E)) = c_{r-1,\,s} + c_{r,s+1} + c_{s-1,\,r} + c_{s,\,r+1} - c_{r-1,\,r} - c_{r,\,r+1} - c_{s-1,\,s} - c_{s,\,s+1}.$$

При $s = r+1$

$$L(C(T_{rs})) = c_{r-1,\,r+1} + c_{r,\,r+2} + c_{r+1,\,r} - c_{r-1,\,r} - c_{r,\,r+1} - c_{r+1,\,r+2}.$$

Если $L(C(T_{r,s})) \geqslant 0$ при $r < s$, то переходим к 3-му шагу. Если имеются значения, при которых $L(C(T_{r,s})) < 0$, то переходим к 3-му шагу.

2-й шаг — выбираем такие незацепленные транспозиции $T_1, T_2, \ldots, T_k$, для которых $L(C(T_i)) < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $\sum_{i=1}^{k} L(C(T_i))$ принимает возможно меньшее значение. Далее в матрице C делаем перестановку строк и столбцов согласно транспозициям $T_1, T_2, \ldots, T_k$ и получим матрицу C^1. К матрице C^1 снова применим 1-й шаг до тех пор, пока получим некоторую матрицу C^q, для которой $L(C^q(T_{r,s})) \geqslant 0$, и переходим к 3-му шагу.

3-й шаг — вычисляем значение целевой функции для матрицы

$$D_1 = c^q_{12} + c^q_{23} + \cdots + c^q_{m-1,\,m} + c^q_{m1}.$$

Далее надо выбрать такие r_1, s_1, при которых функция $L(C^q(T_{r,s}))$ принимает наименьшее положительное значение. В матрице C^q делаем перестановки r_1 и s_1 строк и столбцов. Тогда получим матрицу C^{q+1} и для нее применяем снова 1-й шаг алгоритма. В результате этих действий придем к некоторой матрице C^l, для которой

$$L(C^l(T_{r,s})) \geqslant 0,$$

и переходим к 4-му шагу.

4-й шаг — проверяем достаточное условие минимума. Если оно выполняется, то найденная матрица C^l и есть искомая. Если достаточное условие не выполняется, то надо осуществить случайный поиск, т. е. взять случайную подстановку T, для нее вычислить $C(T)$ и провести шаги алгоритма. Вообще, можно проверить более простое достаточное условие минимума, т. е. проверить совместность такой системы неравенств

$$c^l_{i,i+1} + v_{i+1} \leqslant c^l_{ij} + v_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $v_1, \ldots, v_n$ — неизвестные (индекс $m+1$ считается равным 1); C^l_{ij} — элементы матрицы C^l.

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача нелинейного программирования состоит в нахождении такого вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, при котором достигает минимума (максимума) функция $f(x)$ и выполняются ограничения

$$g_i(x) \leqslant 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

$$x \in M,$$

где среди $f(x)$, $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ имеются нелинейные функции; M — множество значений x. Функция $f(x)$ называется целевой, а $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — функциями ограничений задачи нелинейного программирования.

Всякий вектор x из множества M, удовлетворяющий ограничениям $g_i(x) \leqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, называется допустимым вектором. Множество всех допустимых векторов называется допустимой областью D.

Оптимальным решением называется такой допустимый вектор x, при котором целевая функция достигает минимума. Оптимальным называется значение целевой функции $f(x)$ при x, равном оптимальному решению. Нахождение максимума целевой функции $f(x)$ равносильно нахождению мини-

мума функции $-f(x)$ при тех же ограничениях. При нахождении решения задач нелинейного программирования могут получаться локальные минимумы, что значительно затрудняет нахождение глобального минимума оптимального решения.

Для решения общей задачи нелинейного программирования не разработаны эффективные методы. Для многих частных задач получены приемлемые методы. Если целевая функция непрерывна, а допустимое множество замкнуто, не пустое и ограниченное, то глобальный максимум (минимум) задачи существует. Методы решения задачи нелинейного программирования основаны, главным образом, на итерационных процессах постепенного приближения к максимальному (минимальному) значению целевой функции. Итерационный процесс, как правило, приводит к локальному экстремуму. Поэтому необходимо организовать процедуру перехода от локальных экстремумов к глобальному.

Определение. Если в задаче нелинейного программирования целевая функция $f(x)$ — выпуклая вниз функция, а допустимая область — выпуклое множество, то такая задача называется задачей выпуклого программирования. Выпуклой вниз функцией называется такая $f(x)$, для которой выполняются неравенства

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leqslant \lambda f(x') + (1-\lambda)f(x^2),$$

где x^1 и x^2 — любые два вектора и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Если в общей задаче нелинейного программирования на минимум функции $f(x)$, $g\ (x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ — выпуклые вниз и множество M выпуклое, то она является задачей выпуклого программирования. Для такой задачи поиск глобального минимума значительно упрощается, так как оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема. В задаче выпуклого программирования локальный минимум совпадает с глобальным. Рассмотрим наиболее распространенный метод решения задач нелинейного программирования.

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД

Опишем сначала этот метод для нахождения безусловного максимума дифференцируемой функции $f(x)$, т. е. ставится задача нахождения максимума $f(x)$ без ограничений на x. С этой целью возьмем некоторую точку x^0 и из нее будем двигаться в направлении увеличения функции $f(x)$. Для этого надо выбрать направление l в виде вектора $l = (l_1, \ldots, l_n)$ и продвинуться на расстояние r, которое будем называть шагом. Тогда получим новое значение точки $x^1 = x^0 + lr$. Согласно формуле Тейлора, получим приближенное значение

$$f(x^1) = f(x^0 + lr) = f(x^0) + r(\nabla f,\ l),$$

где ∇ — градиент функции $f(x)$ в точке x^0

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right);$$

$(\nabla f,\ l)$ — скалярное произведение векторов ∇f и l, т. е.

$$(\nabla f,\ l) = l_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + l_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\Bigg).$$

Поскольку $(\nabla f,\ l) = |l|\,|\nabla f| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами l и ∇f, то значение $(\nabla f,\ l)$ достигает максимума тогда, когда $\varphi = 0$, т. е. надо полагать $l = \nabla f$. Получив новое значение x^1, можно продолжить этот процесс и получить $x^2 = x^1 + l^1 r_1$,
где l_1 — направление градиента $\nabla f(x)$ в точке x^1; r_1 — величина шага.

Проводя вычисление по аналогии, получим формулу для итераций

$$x^{n+1} = x^n + l^n r_n,$$

где l^n — градиент $f(x)$ в точке x^n, а r_n — шаг на n-й итерации.

Процесс итераций продолжается до тех пор, пока не будет достигнута определенная точность. В этом и состоит градиентный метод, так как движение осуществляется вдоль градиента.

Необходимым признаком локального экстремума в точке x является равенство нулю всех частных производных в этой точке $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. точка x в этом случае является стационарной.

Заметим, что это условие экстремума лишь необходимое, но не достаточное. Если использовать необходимое условие экстремума для нахождения стационарных точек, то возникает трудность в нахождении решения системы нелинейных уравнений, отвечающих условиям стационарной точки. Эти трудности соизмеримы с нахождением локального экстремума. Далее надо проверить эти точки на достаточность, что также не легко. Поэтому такие методы мало применяют, а используют итеративные методы типа градиентных. Эффективность градиентного метода зависит от выбора величины шага r. В некоторых случаях r выбирают постоянным, но малым, тогда сходимость градиентного метода будет медленной. Если шар r выбрать большим, то сходимости может не быть. Поэтому обычно выбирают шаг, регулярно уменьшающийся и стремящийся к нулю, например $r_n = r_0/n$.

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема, имеет ограниченный экстремум, то для нее градиентный метод сходится. Заметим, что если требуется найти минимум функции $f(x)$, то в формуле для итераций используется антиградиент, т. е. итерации проводят по формуле $x^{n+1} = x^n - l^n r_n$, так как при минимизации надо стараться уменьшить функцию $f(x)$.

Использование градиентного метода при решении задачи нелинейного программирования состоит в следующем:

1. Выбирается начальная точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ из допустимой области, удовлетворяющая ограничениям $g_i(x^0) \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ $x^0 \in M$.

2. Производится движение по градиенту в допустимой области до тех пор, пока будет достигнут экстремум, либо до границы области, т. е. выбирается такое r, при котором $x^{n+1} = x^n + l^n r$ достигается экстремум $f(x)$ (получается значение $f(x)$, достаточно близкое к экстремуму) внутри допустимой области, либо x^{n+1} достигает границы допустимой области и r выбирается из условий

$$\max_r \min_i g_i(x^n + l^n r) \leqslant b_i;$$

$$x^{n+1} = x^n + l^n r \in M,$$

другими словами, выбирается наибольший шаг из возможных значений, допускаемых ограничениями задачи.

3. Последующая точка $x^{n+2} = x^{n+1} + l^{n+1} r$ получается при перемещении в направлении проекции градиента на плоскость, касательную к границе в точке x^{n+1}. Такое перемещение не выводит точку из допустимой области и изменяет целевую функцию в направлении экстремума. Если целевая функция выпуклая вниз, а допустимое множество выпуклое, то такой процесс приводит к локальному или глобальному экстремуму. Если нет уверенности в том, что полученное решение соответствует глобальному экстремуму, то выбирают другое начальное значение x^0 и снова применяют градиентный метод. Так поступают несколько раз и изучают, имеется ли улучшение плана (лучшее значение принимают в качестве решения). К сожалению, при решении общей задачи нелинейного программирования нет эффективных регулярных алгоритмов для нахождения глобального экстремума. Поэтому часто используют метод случайного выбора начальной точки $x^0 \in D$, а затем улучшают это значение градиентным методом. Многократное повторение этого метода может привести к цели.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 р.



СПРАВОЧНИК

КИЕВ «ТЕХНІКА»